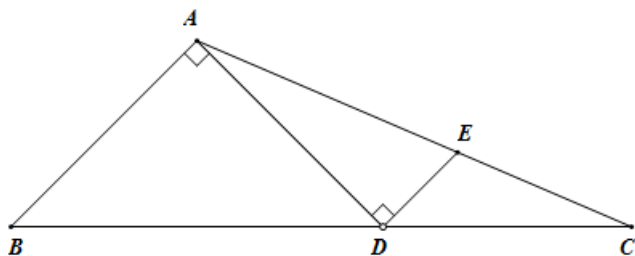


知识点 38——相似、位似及其应用

一、选择题

1. (2019·苏州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 为 BC 边上的一点. 且 $AD=AB=2$, $AD \perp AB$, 过点 D 作 $DE \perp AD$, DE 交 AC 于点 E . 若 $DE=1$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- A. $4\sqrt{2}$ B. 4 C. $2\sqrt{5}$ D. 8



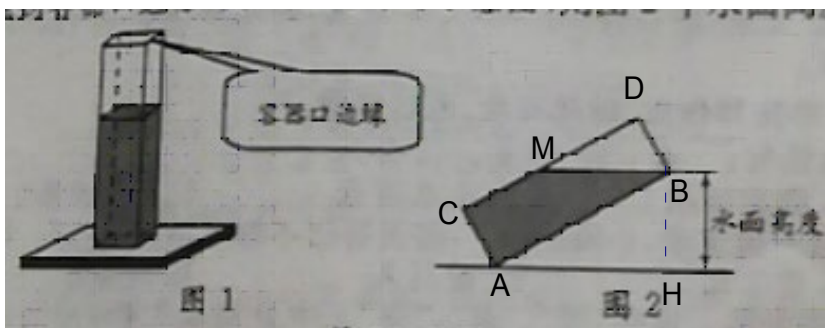
第 10 题图

【答案】B

【解析】 $\because AB \perp AD$, $AD \perp DE$, $\therefore \angle BAD = \angle ADE = 90^\circ$, $\therefore DE \parallel AB$, $\therefore \angle CED = \angle CAB$, $\because \angle C = \angle C$, $\therefore \triangle CED \sim \triangle CAB$, $\because DE = 1$, $AB = 2$, 即 $DE : AB = 1 : 2$, $\therefore S_{\triangle DEC} : S_{\triangle ACB} = 1 : 4$, $\therefore S_{\text{四边形} ABDE} : S_{\triangle ACB} = 3 : 4$, $\therefore S_{\text{四边形} ABDE} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 2 + 1 = 3$, $\therefore S_{\triangle ACB} = 4$, 故选 B.

2. (2019·绍兴) 如图 1, 长、宽均为 3, 高为 8 的长方体容器, 放置在水平桌面上, 里面盛有水, 水面高为 6, 绕底面一棱长进行旋转倾斜后, 水面恰好触到容器口边缘, 图 2 是此时的示意图, 则图 2 中水面高度为 ()

- A. $\frac{24}{5}$ B. $\frac{32}{5}$ C. $\frac{12\sqrt{34}}{17}$ D. $\frac{20\sqrt{34}}{17}$



【答案】A

【解析】 如图所示: 设 $DM = x$, 则 $CM = 8 - x$,

根据题意得： $\frac{1}{2} (8 - x + 8) \times 3 \times 3 = 3 \times 3 \times 5$ ，

解得： $x = 4$ ， $\therefore DM = 6$ ，

$\because \angle D = 90^\circ$ ，由勾股定理得： $BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ，

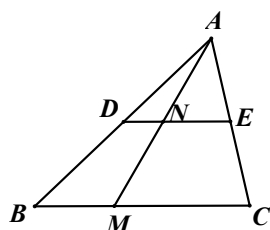
过点 B 作 $BH \perp AH$ ， $\because \angle HBA + \angle ABM = \angle ABM + \angle ABM = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle HBA = \angle ABM$ ，所以 $Rt\triangle ABH \sim \triangle MBD$ ，

$\therefore \frac{BH}{AB} = \frac{BD}{BM}$ ，即 $\frac{BH}{8} = \frac{3}{5}$ ，解得 $BH = \frac{24}{5}$ ，即水面高度为 $\frac{24}{5}$ 。

3. (2019 · 杭州) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在 AB 和 AC 边上， $DE \parallel BC$ ，M 为 BC 边上一点(不与点 B, C 重合)连接 AM 交 DE 于点 N，则 ()

- A. $\frac{AD}{AN} = \frac{AN}{AE}$ B. $\frac{BD}{MN} = \frac{MN}{CE}$ C. $\frac{DN}{BM} = \frac{NE}{MC}$ D. $\frac{DN}{MC} = \frac{NE}{BM}$

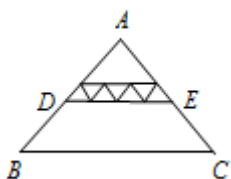


【答案】C

【解析】根据 $DE \parallel BC$ ，可得 $\triangle ADN \sim \triangle ABM$ 与 $\triangle ANE \sim \triangle AMC$ ，再应用相似三角形的性质可得结论. $\because DN \parallel BM$ ， $\therefore \triangle ADN \sim \triangle ABM$ ， $\therefore \frac{DN}{BM} = \frac{AN}{AM}$ ， $\because NE \parallel MC$ ， $\therefore \triangle ANE \sim \triangle AMC$ ， $\therefore \frac{NE}{MC} = \frac{AN}{AM}$ ， $\therefore \frac{DN}{BM} = \frac{NE}{MC}$ 。故选 C。

4. (2019 · 常德) 如图，在等腰三角形 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，图中所有三角形均相似，其中最小的三角形的面积为 1， $\triangle ABC$ 的面积为 42，则四边形 $DBCE$ 的面积是 ()

- A. 20 B. 22 C. 24 D. 26



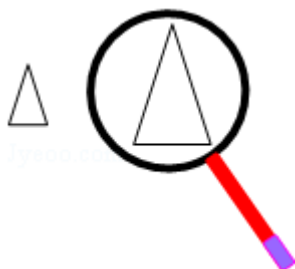
【答案】D

【解析】 $\because$ 图中所有三角形均相似，其中最小的三角形的面积为 1， $\triangle ABC$ 的面积为 42， $\therefore$ 最小的三角形与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $\frac{1}{\sqrt{42}}$ ， $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ， $\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$ ， $\therefore \frac{DE}{BC} = 4 \times \frac{1}{\sqrt{42}} = \frac{4}{\sqrt{42}}$ ， $\therefore$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{16}{42} = \frac{8}{21},$$

$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{8}{21} \times 42 = 16$, $\therefore$ 四边形 $DBCE$ 的面积 $= S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} = 26$, 故选项 D 正确.

5. (2019 · 陇南) 如图, 将图形用放大镜放大, 应该属于 ()



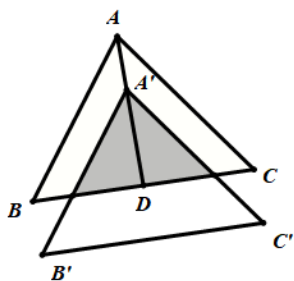
- A. 平移变换 B. 相似变换 C. 旋转变换 D. 对称变换

【答案】B

【解析】 由图可知, 放大前与放大后图形是相似的, 故选: B.

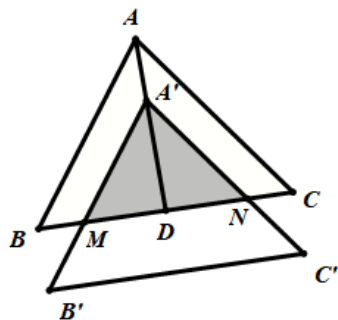
6. (2019 · 枣庄) 如图, 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 边上的中线 AD 平移到 $\triangle A'B'C'$ 的位置, 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 16, 阴影部分三角形的面积为 9, 若 $AA' = 1$, 则 $A'D$ 等于 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. $\frac{3}{2}$

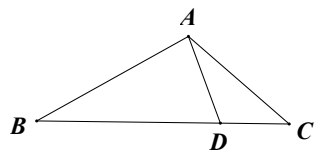


【答案】B

【解析】 由平移可得, $\triangle ABC \sim \triangle A'MN$, 设相似比为 k , $\because S_{\triangle ABC} = 16, S_{\triangle A'MN} = 9, \therefore k^2 = 16:9, \therefore k = 4:3$, 因为 AD 和 $A'D$ 分别为两个三角形的中线, $\therefore AD:A'D = k = 4:3, \therefore AD = AA' + A'D, \therefore AA':A'D = 1:3, \therefore AA' = 1$, 则 $A'D = 3$, 故选 B.



- 7.(2019·淄博)如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AC=2$, $BC=4$, D 为 BC 边上的一点,且 $\angle CAD=\angle B$.若 $\triangle ADC$ 的面积为 a ,则 $\triangle ABD$ 的面积为()



- A. $2a$ B. $\frac{5}{2}a$ C. $3a$ D. $\frac{7}{2}a$

【答案】C.

【解析】在 $\triangle BAC$ 和 $\triangle ADC$ 中, $\because \angle C$ 是公共角, $\angle CAD=\angle B$, $\therefore \triangle BAC \sim \triangle ADC$, $\therefore \frac{BC}{AC}=2$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DAC}} = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 4$,又 $\because \triangle ADC$ 的面积为 a , $\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $4a$, $\therefore \triangle ABD$ 的面积为 $3a$.

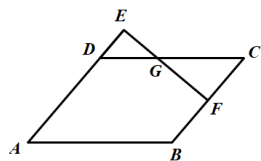
- 8.(2019·巴中)如图,□ABCD,F为BC中点,延长AD至E,使 $DE:AD=1:3$,连接EF交DC于点G,则 $S_{\triangle DEG}:S_{\triangle CFG}=(\quad)$

A.2:3

B.3:2

C.9:4

D.4:9



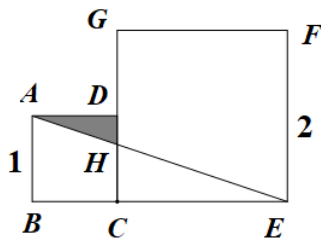
【答案】D

【解析】因为 $DE:AD=1:3$,F为BC中点,所以 $DE:CF=2:3$,□ABCD中, $DE \parallel CF$,所以 $\triangle DEG \sim \triangle CFG$,相似比为2:3,所以 $S_{\triangle DEG}:S_{\triangle CFG}=4:9$.故选D.

- 9.(2019·乐山)把边长分别为1和2的两个正方形按如图的方式放置.则图中阴影部分的面积为()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{4}$

【答案】A



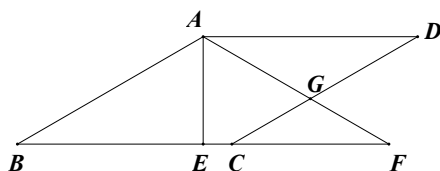
第8题答图

【解析】 $\because$ 四边形ABCD与四边形CEFG都是正方形, $\therefore AD=DC=1$, $CE=2$, $AD \parallel CE$, $\therefore \triangle ADH \sim \triangle$

ECF , $\therefore \frac{AD}{CE} = \frac{DH}{CH}$, $\therefore \frac{1}{2} = \frac{DH}{1-DH}$,解得 $DH=\frac{1}{3}$, $\therefore$ 阴影部分面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6}$,故选A.

10. (2019·乐山) 如图, 在边长为 $\sqrt{3}$ 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = 30^\circ$, 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 现将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折至 $\triangle AFE$ 的位置, AF 与 CD 交于点 G . 则 CG 等于 ()

- A. $\sqrt{3}-1$ B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



第10题图

【答案】A

【解析】 $\because AE \perp BC$, $\therefore \angle AEB = 90^\circ$, 菱形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{3}$, $\angle B = 30^\circ$, $\therefore AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $BE = CF = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 1.5$, $BF = 3$, $CF = BF - BC = 3 - \sqrt{3}$, $\because AD \parallel CF$, $\therefore \triangle AGD \sim \triangle FGC$, $\therefore \frac{DG}{CG} = \frac{AD}{CF}$, $\therefore \frac{\sqrt{3} - CG}{CG} = \frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$, 解得 $CG = \sqrt{3} - 1$, 故选 A.

11. (2019·凉山) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 在 AC 边上, $AD:DC = 1:2$, O 是 BD 的中点, 连接 AO 并延长交 BC 于 E , 则 $BE:EC =$ () A. 1:2 B. 1:3 C. 1:4 D. 2:3

【答案】B

【解答】解: 如图, 过 O 作 $OG \parallel BC$, 交 AC 于 G .

$\because O$ 是 BD 的中点,

$\therefore G$ 是 DC 的中点,

又 $AD:DC = 1:2$,

$\therefore AD = DG = GC$,

$\therefore AG:GC = 2:1$, $AO:OE = 2:1$,

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOE} = 2$

设 $S_{\triangle BOE} = S$, $S_{\triangle AOB} = 2S$, 又 $BO = OD$,

$\therefore S_{\triangle AOD} = 2S$, $S_{\triangle ABD} = 4S$,

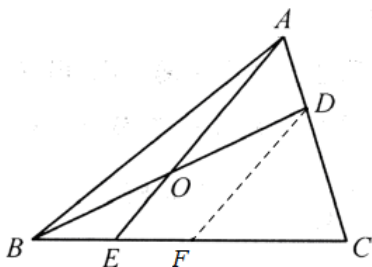
$\therefore AD:DC = 1:2$,

$\therefore S_{\triangle BDC} = 2S_{\triangle ABD} = 8S$, $S_{\text{四边形}CDOE} = 7S$,

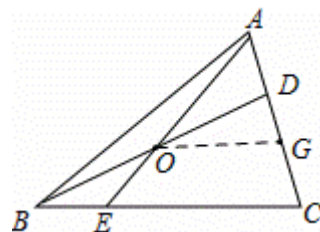
$\therefore S_{\triangle AEC} = 9S$, $S_{\triangle ABE} = 3S$,

$$\frac{BE}{EC} = \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEC}} = \frac{3S}{9S} = \frac{1}{3}$$

故选: B.



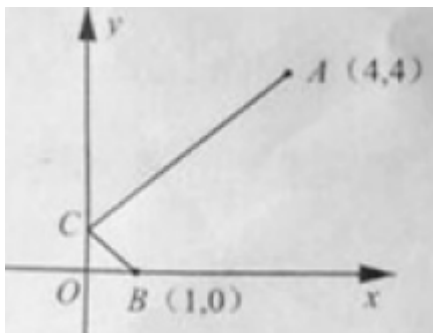
第11题图



第11题解答图

12. (2019·眉山) 如图, 一束光线从点 $A(4, 4)$ 出发, 经 y 轴上的点 C 反射后, 经过点 $B(1, 0)$, 则点 C 的坐标是 ()

- A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(0, \frac{4}{5})$ C. $(0, 1)$ D. $(0, 2)$



【答案】B

【解析】解：过点 A 作 $AD \perp y$ 轴于点 D， $\because \angle ADC = \angle COB = 90^\circ$ ， $\angle ACD = \angle BCO$ ， $\therefore \triangle OBA \sim \triangle DAC$ ， $\therefore \frac{OC}{OB} = \frac{DC}{AD}$ ， $\therefore \frac{OC}{1} = \frac{4-OC}{4}$ ，解得： $OC = \frac{4}{5}$ ， $\therefore$ 点 C $(0, \frac{4}{5})$ ，故选 B.

13. (2019·眉山) 如图，在菱形 ABCD 中已知 $AB=4$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ， $\angle EAF=60^\circ$ ，点 E 在 CB 的延长线上，点 F 在 DC 的延长线上，有下列结

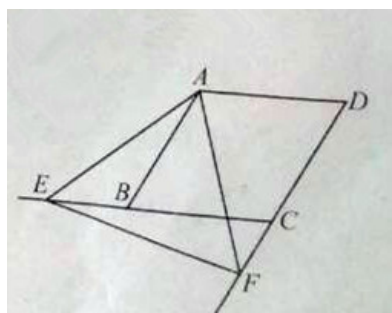
论：① $BE=CF$ ，② $\angle EAB = \angle CEF$ ；③ $\triangle ABE \sim \triangle EFC$ ，④ 若 $\angle BAE = 15^\circ$ ，则点 F 到 BC 的距离为 $2\sqrt{3}-2$ ，则其中正确结论的个数是 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个



【答案】B

【解析】连接 AC，在菱形 ABCD 中， $AB=BC$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ， $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore AB=AC$ ， $\angle BAC=60^\circ$ ， $\because \angle EAF=60^\circ$ ， $\therefore \angle EAB + \angle BAF = \angle CAF + \angle BAF = 60^\circ$ ，即 $\angle EAB = \angle CAF$ ， $\because \angle ABE = \angle ACF = 120^\circ$ ， $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF$ ， $\therefore BE=CF$ ，故①正确；由 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ ，可得 $AE=AF$ ， $\because \angle EAF=60^\circ$ ， $\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形， $\therefore \angle AEF=60^\circ$ ， $\therefore \angle AEB + \angle CEF = 60^\circ$ ， $\because \angle AEB + \angle EAB = 60^\circ$ ， $\therefore \angle CEF = \angle EAB$ ，故②正确；在 $\triangle ABE$ 中， $\angle AEB < 60^\circ$ ， $\angle ECF = 60^\circ$ ， $\therefore$ ③错误；过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G，过点 F 作 $FH \perp EC$ 于点 H， $\because \angle EAB = 15^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\therefore \angle AEB = 45^\circ$ ，在 $Rt\triangle AGB$ 中， $\because \angle ABC = 60^\circ$ ， $AB=4$ ，

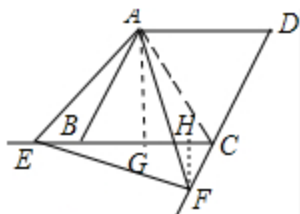
$\therefore BG = \frac{1}{2}AB = 2$ ， $AG = \sqrt{3}BG = 2\sqrt{3}$ ，在 $Rt\triangle AEG$ 中， $\because \angle AEG = \angle EAG = 45^\circ$ ， $\therefore AG = GE = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore EB = EG - BG = 2\sqrt{3} - 2$ ， $\because \angle BAC = \angle EAF = 60^\circ$ ， $\therefore \angle BAE = \angle CAF$ ， $\because \angle ABC = \angle ACD = 60^\circ$ ， $\therefore \angle ABE = \angle ACF = 120^\circ$

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AFC$ 中，
$$\begin{cases} \angle EAB = \angle FAC \\ AB = AC \\ \angle ABE = \angle ACF = 120^\circ \end{cases}$$
， $\therefore \triangle AEB \cong \triangle AFC$ ， $\therefore AE = AF$ ， $EB = CF = 2\sqrt{3} - 2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CHF$ 中, $\because \angle HCF = 180^\circ - \angle BCD = 60^\circ$, $CF = 2\sqrt{3} - 2$, $\therefore FH = CF \cdot \sin 60^\circ = (2\sqrt{3} - 2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3}$.

$\therefore$ 点 F 到 BC 的距离为 $3 - \sqrt{3}$. 故④错误. 故选 B .



14. (2019 • 重庆 B 卷) 下列命题是真命题的是 ()

- A. 如果两个三角形相似, 相似比为 $4:9$, 那么这两个三角形的周长比为 $2:3$
- B. 如果两个三角形相似, 相似比为 $4:9$, 那么这两个三角形的周长比为 $4:9$
- C. 如果两个三角形相似, 相似比为 $4:9$, 那么这两个全角形的面积比为 $2:3$
- D. 如果两个三角形相似, 相似比为 $4:9$, 那么这两个三角形的面积比为 $4:9$

【答案】B

【解析】 如果两个三角形相似, 那么这两个三角形的周长比等于相似比, 面积比是相似比的平方. 即如果两个三角形相似, 相似比为 $4:9$, 那么这两个三角形的周长比为 $4:9$; 面积比是相似比的平方, 即 $16:81$. 故选 B .

15. (2019 • 重庆 A 卷) 如图, $\triangle ABO \sim \triangle CDO$, 若 $BO = 6$, $DO = 3$, $CD = 2$, 则 AB 的长是 ()

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5

【答案】C.

【解析】 $\because \triangle ABO \sim \triangle CDO$, $\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BO}{DO}$. $\because BO = 6$, $DO = 3$, $CD = 2$, $\therefore \frac{AB}{2} = \frac{6}{3}$. $\therefore AB = 4$. 故选 C .

二、填空题

1. (2019 • 滨州) 在平面直角坐标系中, $\triangle ABO$ 三个顶点的坐标分别为 $A(-2, 4)$, $B(-4, 0)$, O

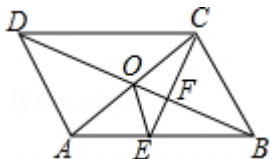
$(0, 0)$. 以原点 O 为位似中心, 把这个三角形缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到 $\triangle CDO$, 则点 A 的对应点 C

的坐标是_____.

【答案】 $(-1, 2)$ 或 $(1, -2)$

【解析】 点 A 的对应点 C 的坐标是 $(-2 \times \frac{1}{2}, 4 \times \frac{1}{2})$ 或 $(-2 \times (-\frac{1}{2}), 4 \times (-\frac{1}{2}))$, 即 $(-1, 2)$ 或 $(1, -2)$.

2. (2019 • 滨州) 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O , CE 平分 $\angle BCD$ 交 AB 于点 E , 交 BD 于点 F , 且 $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 2BC$, 连接 OE . 下列结论: ① $EO \perp AC$; ② $S_{\triangle AOD} = 4S_{\triangle OCF}$; ③ $AC: BD = \sqrt{21}: 7$; ④ $FB^2 = OF \cdot DF$. 其中正确的结论有_____。(填写所有正确结论的序号)



【答案】①③④

【解析】在 $\square ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\therefore \angle BCD = 120^\circ$. $\because CE$ 平分 $\angle BCD$, $\therefore \angle BCE = 60^\circ$, $\therefore \triangle BCE$ 是等边三角形, $\therefore BE = BC = CE$, $\angle BEC = 60^\circ$. $\because AB = 2BC$, $\therefore AE = BE = CE$, $\therefore \angle EAC = \angle ACE = 30^\circ$, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$. 在 $\square ABCD$ 中, $AO = CO$, $BO = DO$, $\therefore OE$ 是 $\triangle ACB$ 的中位线, $\therefore OE \parallel BC$, $\therefore OE \perp AC$,

故①正确; $\because OE$ 是 $\triangle ACB$ 的中位线, $\therefore OE = \frac{1}{2} BC$, $\because OE \parallel BC$, $\therefore \triangle OEF \sim \triangle BCF$, $\therefore OF: BF = OE:$

$BC = 1: 2$, $\therefore S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = 3S_{\triangle OCF}$, 故②错误; 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\because AB = 2BC$, $\therefore AC = \sqrt{3} BC$, $\therefore OC = \frac{\sqrt{3}}{2}$

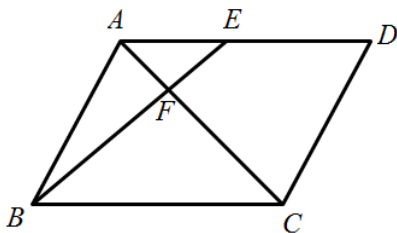
BC . 在 $Rt\triangle BCO$ 中, $OB = \frac{\sqrt{7}}{2} BC$, $\therefore BD = \sqrt{7} BC$, $\therefore AC: BD = \sqrt{3} BC: \sqrt{7} BC = \sqrt{21}: 7$, 故③

正确; $\because OF: BF = 1: 2$, $\therefore BF = 2OF$, $OB = 3OF$, $\because OD = OB$, $\therefore DF = 4OF$, $\therefore BF^2 = (2OF)^2 = 4OF^2$, $OF \cdot DF = OF \cdot 4OF = 4OF^2$, $\therefore BF^2 = OF \cdot DF$, 故④正确.

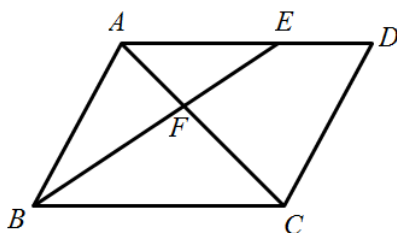
3. (2019 • 凉山) 在 $\square ABCD$ 中, E 是 AD 上一点, 且点 E 将 AD 分为 $2: 3$ 的两部分, 连接 BE, AC 相交于 F , 则 $S_{\triangle AEF}: S_{\triangle CBF}$ 是_____.

【答案】4: 25 或 9: 25

【解析】在 $\square ABCD$ 中, $\because AD \parallel BC$, $\therefore \triangle AEF \sim \triangle CBF$. 如答图 1, 当 $AE: DE = 2: 3$ 时, $AE: AD = 2: 5$, $\because AD = BC$, $\therefore AE: BC = 2: 5$, $\therefore S_{\triangle AEF}: S_{\triangle CBF} = 4: 25$; 如答图 2, 当 $AE: DE = 3: 2$ 时, $AE: AD = 3: 5$, $\because AD = BC$, $\therefore AE: BC = 3: 5$, $\therefore S_{\triangle AEF}: S_{\triangle CBF} = 9: 25$. 故答案为 4: 25 或 9: 25.

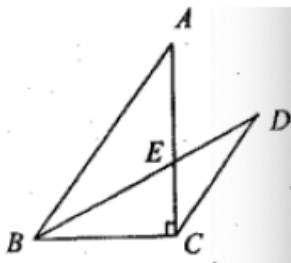


(第 3 题图答图 1)



(第 3 题图答图 2)

4. (2019·自贡) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AB=10$, $BC=6$, $CD\parallel AB$, $\angle ABC$ 的平分线 BD 交 AC 于点 E , $DE=$ _____.



【答案】 $\frac{9}{5}\sqrt{5}$.

【解析】 $\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle D = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle D,$$

$$\therefore CD = BD = 6.$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{DE}{BE} = \frac{CD}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore CE = \frac{3}{5}AE, DE = \frac{3}{5}BE.$$

$$\text{即 } CE = \frac{3}{8}AC = \frac{3}{8} \times 8 = 3.$$

$$\text{在 } Rt\triangle BCE \text{ 中, } BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}.$$

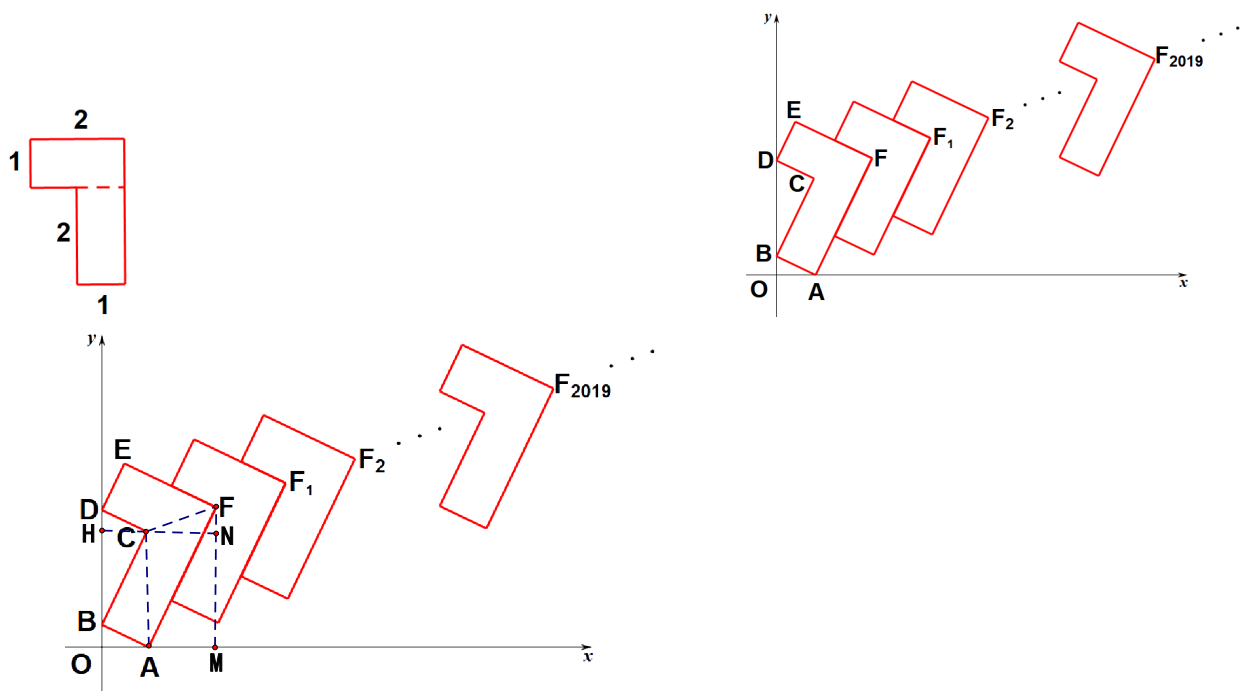
$$\therefore DE = \frac{3}{5}BE = \frac{3}{5} \times 3\sqrt{5} = \frac{9}{5}\sqrt{5}.$$

5. (2019·衢州) 如图, 由两个长为2, 宽为1的长方形组成“7”字图形。

(1) 将一个“7”字图形按如图摆放在平面直角坐标系中, 记为“7”字图形 $ABCDEF$, 其中顶点 A 位于 x 轴上, 顶点 B, D 位于 y 轴上, O 为坐标原点, 则 $\frac{OB}{OA}$ 的值为_____.

(2) 在 (1) 的基础上, 继续摆放第二个“7”字图形得顶点 F_1 , 摆放第三个“7”字图形得顶点 F_2 . 依此

类推，……摆放第n个“7”字图形得顶点 F_{n-1} ……则顶点 F_{2019} 的坐标为_____.



【答案】 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $(\frac{6062\sqrt{5}}{5}, 405\sqrt{5})$

【解析】 (1) 因为 $\angle DBC + \angle BDC = 90^\circ$, $\angle DBC + \angle OBA = 90^\circ$, $\angle DCB = \angle BOA = 90^\circ$, 所以 $\angle BDC = \angle OBA$, 所以 $\triangle CDB \sim \triangle OBA$, 所以 $OB:OA = CD:CB = \frac{1}{2}$.

(2) 因为 $OB:OA = 1:2$, $AB = 1$, 由勾股定理得 $OB = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $OA = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 因为 $\angle CDH = \angle ABO$, $\angle DHC = \angle BOA = 90^\circ$, $CD = AB$, 所以 $\triangle DHC \cong \triangle BOA$, 所以四边形 $OACH$ 为矩形, $DH = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $HC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 同理 $\triangle MAF \sim \triangle OBA$, 由 $AF = 3$ 得, $AM = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $FM = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, 在直角三角形 NCF 中, $CN = AM = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, $CF = \sqrt{2}$, $NF = \sqrt{CF^2 - CN^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 在直角三角形 ABC 中, $AC = \sqrt{5}$, F 点的坐标为 $(\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{5})$; 根据规律 F_1 比 F 的横坐标增加 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 单位、纵坐标增加 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$, F, F_1 点的坐标为 $(\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} \times 2, \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} \times 2)$; F_2 比 F_1 的横坐标增加 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 单位, 纵坐标增加 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 单位, F_2 点的坐标为 $(\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} \times 2, \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} \times 2)$.

$$+\frac{3\sqrt{5}}{5} \times 3, \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} \times 3); \dots \text{所以 } F_{2019} \text{ 的坐标为 } (\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} \times 2020, \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} \times 2020), \text{ 即}$$

$$(\frac{6062\sqrt{5}}{5}, 405\sqrt{5}).$$

三、解答题

1. (2019 · 长沙) (9 分) 根据相似多边形的定义, 我们把四个角分别相等, 四条边成比例的两个凸四边形叫做相似四边形. 相似四边形对应边的比叫做相似比.

(1) 某同学在探究相似四边形的判定时, 得到如下三个命题, 请判断它们是否正确 (直接在横线上填写“真”或“假”).

① 条边成比例的两个凸四边形相似; (命题)

② 三个角分别相等的两个凸四边形相似; (命题)

③ 两个大小不同的正方形相似. (命题)

(2) 如图 1, 在四边形 ABCD 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 中, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}, \text{ 求证: 四边形 ABCD 与四边形 } A_1B_1C_1D_1 \text{ 相似.}$$

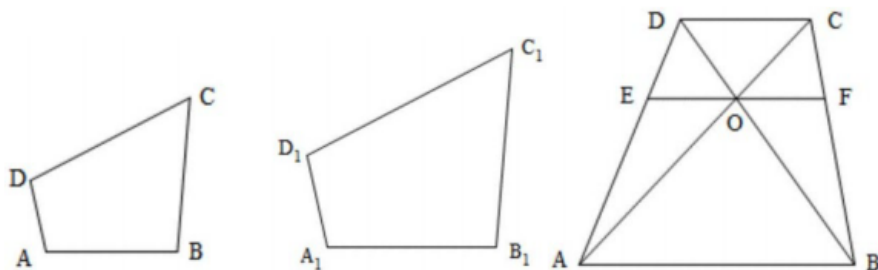


图1

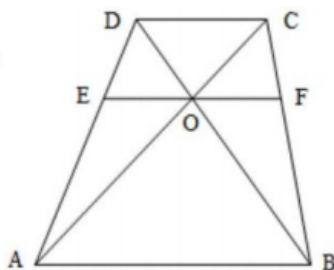


图2

(3) 如图 2, 四边形 ABCD 中, $AB \parallel CD$, AC 与 BD 相交于点 O, 过点 O 作 $EF \parallel AB$ 分别交 AD, BC 于点 E, F. 记四边形 ABFE 的面积为 S_1 , 四边形 EFCD 的面积为 S_2 , 若四边形 ABFE 与四边形 EFCD 相似, 求 $\frac{S_2}{S_1}$ 的值.

【解题过程】(1) 解: (1)① 四条边成比例的两个凸四边形相似, 是假命题, 角不一定相等; ② 三个角分别相等的两个凸四边形相似, 是假命题, 边不一定成比例; ③ 两个大小不同的正方形相似, 是真命题. 故答案为假, 假, 真.

(2) 如图, 分别连接 BD、 B_1D_1 ,

$$\because \angle BCD = \angle B_1C_1D_1, \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}, \therefore \triangle BCD \sim \triangle B_1C_1D_1,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle C_1B_1D_1, \angle CDB = \angle C_1D_1B_1, \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1},$$

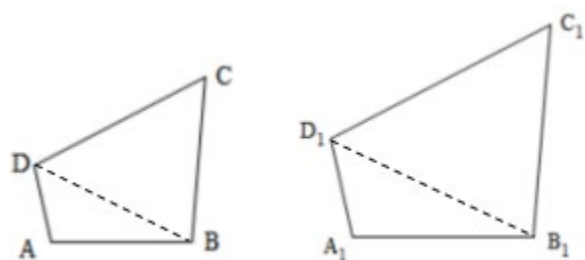
$$\text{又} \because \angle ABC = \angle A_1 B_1 C_1, \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} \therefore \angle ABD = \angle A_1 B_1 D_1, \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{BD}{B_1 D_1},$$

$$\frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{AD}{A_1 D_1}, \angle ADB = \angle A_1 D_1 B_1, \angle DAB = \angle D_1 A_1 B_1,$$

$$\therefore \frac{AB}{A_1 B_1} = \frac{BC}{B_1 C_1} = \frac{CD}{C_1 D_1} = \frac{AD}{A_1 D_1}, \angle ABC = \angle A_1 B_1 C_1, \angle BCD = \angle B_1 C_1 D_1, \angle ADC = \angle A_1 D_1 C_1, \angle DAB =$$

$$\angle D_1 A_1 B_1,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 相似.



$$(3) \because \text{四边形 } ABFE \text{ 与四边形 } EFCD \text{ 相似}, \therefore \frac{DE}{AE} = \frac{EF}{AB},$$

$$\because EF = OE + OF, \therefore \frac{DE}{AE} = \frac{OE + OF}{AB},$$

$$\because EF \parallel AB \parallel CD, \therefore \frac{DE}{AD} = \frac{OE}{AB}, \frac{DE}{AD} = \frac{OC}{AB} = \frac{OF}{AB},$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} + \frac{DE}{AD} = \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{AB}, \therefore \frac{2DE}{AD} = \frac{DF}{AE},$$

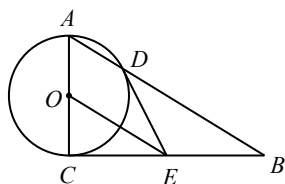
$$\because AD = DE + AE, \therefore \frac{2}{DE + AE} = \frac{1}{AE},$$

$$\therefore 2AE = DE + AE, \text{ 即 } AE = DE, \therefore \frac{S_1}{S_2} = 1$$

2. (2019·黄冈) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 以 AC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 D 过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 BC 于点 E , 连接 OE .

(1) 求证: $\triangle DBE$ 是等腰三角形;

(2) 求证: $\triangle COE \sim \triangle CAB$.



【解题过程】

证明: (1) 连接 OD .

$\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle ODE = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADO + \angle BDE = 90^\circ$,

又 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$,

$\because OA = OB$, $\therefore \angle A = \angle ADO$,

$\therefore \angle BDE = \angle B$,

$\therefore EB = ED$,

$\therefore \triangle DBE$ 是等腰三角形.

(2) $\because \angle ACB = 90^\circ$, AC 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore CB$ 是 $\odot O$ 的切线,

又 $\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore DE = EC$.

$\because DE = EB$,

$\therefore EC = EB$.

$\because OA = OC$,

$\therefore OE \parallel AB$.

$\therefore \triangle COE \sim \triangle CAB$

3. (2019 安徽) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$. P 为 $\triangle ABC$ 内部一点, 且 $\angle APB = \angle BPC = 135^\circ$.

(1) 求证: $\triangle PAB \sim \triangle PBC$;

(2) 求证: $PA = 2PC$;

(3) 若点 P 到三角形的边 AB , BC , CA 的距离分别为 h_1 , h_2 , h_3 . 求证: $h_1^2 = h_2 \cdot h_3$.

【解题过程】解: (1) 证明: 在 $\triangle ABP$ 中, $\angle APB = 135^\circ$, $\therefore \angle ABP + \angle BAP = 45^\circ$,
又 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle ABC = 45^\circ$, 即 $\angle ABP + \angle CBP = 45^\circ$,
 $\therefore \angle BAP = \angle CBP$, 又 $\angle APB = \angle BPC = 135^\circ$, $\therefore \triangle PAB \sim \triangle PBC$; 4 分

(2) 由 (1) 知 $\triangle PAB \sim \triangle PBC$, 所以 $\frac{PA}{PB} = \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{2}$,

于是, $\frac{PA}{PC} = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{PB}{PC} = 2$, 即 $PA = 2PC$; 9 分

(3) 如图 3, 过点 P 作边 AB , BC , CA 的垂线, 垂足分别为 Q , R , S , 则 $PQ = h_1$,
 $PR = h_2$, $PS = h_3$, 在 $Rt\triangle CPR$ 中, $\frac{PR}{CR} = \tan \angle PCR = \frac{CP}{AP} = \frac{1}{2}$, $\frac{h_2}{h_3} = \frac{1}{2}$, 即 $h_3 = 2h_2$,

又由 $\triangle PAB \sim \triangle PBC$, 且 $\frac{AB}{BC} = \sqrt{2}$, 故 $\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{2}$, 即 $h_1 = \sqrt{2}h_2$,

于是 $h_1^2 = h_2 \cdot h_3$ 14 分

4. (2019 · 重庆 B 卷) 在 $\square ABCD$ 中, BE 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于点 E .

(1) 如图 1, 若 $\angle D = 30^\circ$, $AB = \sqrt{6}$, 求 $\triangle ABE$ 的面积;

(2) 如图 2, 过点 A 作 $AF \perp DC$, 交 DC 的延长线于点 F , 分别交 BE , BC 于点 G , H , 且 $AB = AF$, 求证: $ED - AG = FC$.

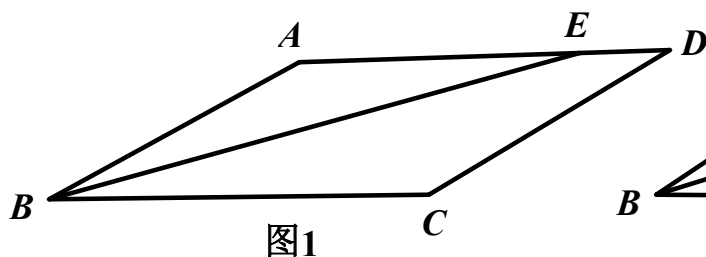


图1

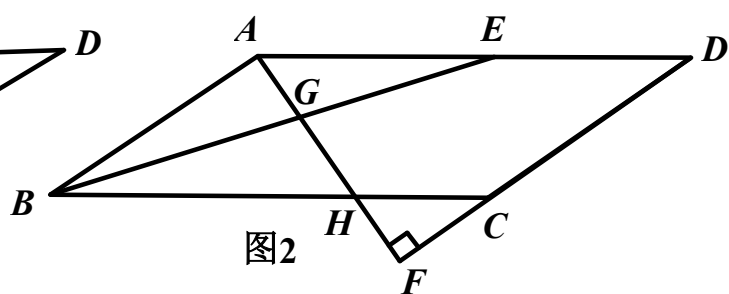


图2

解：(1) 过点 E 作 $EN \perp AB$ ，交 BA 延长线于点 N ，垂足为 N ，

在 $\square ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD \parallel CB$ ， $\angle D = \angle ABC = 30^\circ$ ， $\therefore \angle ABC = \angle EAN = 30^\circ$ ；

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ， $\therefore \angle ABE = \angle CBE$ ， $\because AD \parallel BC$ ， $\therefore \angle AEB = \angle CBE$ ， $\therefore \angle AEB = \angle ABE$ ， $\therefore AB = AE = \sqrt{6}$ ；

在 $\text{Rt}\triangle AEN$ 中， $\cos 30^\circ = \frac{EN}{AE}$ ， $EN = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ， $\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot EN = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 。

(2) 延长 BE 交 CD 延长线于点 M ，设 $AG = x$ ， $AB = a$ ， $DE = b$ ， $CF = c$ ，

$\therefore$ 在 $\square ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ，且 $CD = AB = a$ ，

$\because AB = AF$ ， $\therefore AF = AB = a$ ， $\therefore GF = a - x$ ，

$\because AB \parallel CD$ ， $\therefore \angle ABM = \angle M$ ， $\angle CBE = \angle AEB$ ，

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ， $\therefore \angle ABM = \angle CBE$ ， $\therefore \angle ABM = \angle AEB$ ， $\therefore AE = AB = a$ ；

$\because \angle AEB = \angle DEM$ ， $\therefore \angle DEM = \angle M$ ， $\therefore DM = DE = b$ ， $\therefore FM = a + b + c$ ，

$\because AB \parallel CD$ ， $\therefore \frac{AG}{FG} = \frac{AB}{FM}$ ， $\therefore \frac{x}{a-x} = \frac{a}{a+b+c}$ ，解得： $x = \frac{a^2}{2a+b+c}$ ；

$\because AF \perp DC$ ， $\therefore \angle F = 90^\circ$ ， $\because AE = a$ ， $DE = b$ ， $DF = a + c$ ， $AF = a$ ，

$\therefore AF^2 + DF^2 = AD^2$ ，

$\therefore a^2 + (a+c)^2 = (a+b)^2$ ，

$\therefore a^2 + 2ac + c^2 = 2ab + b^2$ ，

$\therefore AG + CF = x + c = \frac{a^2}{2a+b+c} + c = \frac{a^2}{2a+b+c} + \frac{2ac+bc+c^2}{2a+b+c}$

$= \frac{a^2 + 2ac + bc + c^2}{2a+b+c} = \frac{(a^2 + 2ac + c^2) + bc}{2a+b+c} = \frac{2ab + b^2 + bc}{2a+b+c} = b = DE$ ， $\therefore DE - AG = CF$ 。

5.(2019 • 台州)如图,正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 AB 的中点, P 是 BA 延长线上的一点,连接 PC 交 AD 于点 F , $AP = FD$ 。

(1) 求 $\frac{AF}{AP}$ 的值;

(2)如图 1,连接 EC,在线段 EC 上取一点 M,使 EM=EB,连接 MF,求证:MF=PF;

(3)如图 2,过点 E 作 $EN \perp CD$ 于点 N,在线段 EN 上取一点 Q,使 $AQ=AP$,连接 BQ,BN,将 $\triangle AQB$ 绕点 A 旋转,使点 Q 旋转后的对应点 Q'落在 AD 上.请判断点 B 旋转后的对应点 B'是否落在线段 BN 上,并说明理由.

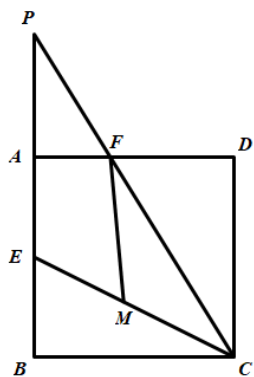


图1

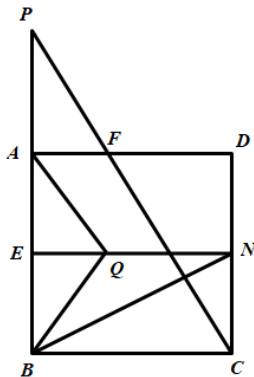


图2

【分析】(1)通过相似构造等量解得对应线段 AF 与 FD 的长度,来求解它们之间的比例;(2)通过连接 PD,构造全等转化 $\angle 3$ 与 $\angle 1$ 相等,再利用第一问求得的 AP 的长度得到 $EP=EC$,从而得到 $\angle 1 = \angle 4$,故转化 $\angle 3 = \angle 4$,从而证明 $\triangle PFD \cong \triangle FMC$;(3)构造三角形,通过证明相似,求得对应线段长度,进行比较,从而得到结论.

解: (1)设 $AP=x$,则 $FD=x$, $AF=2-x$,

$\because$ 在正方形 ABCD 中, $AB \parallel CD$, $\therefore \triangle PAF \sim \triangle CDF$,

$$\therefore \frac{AF}{FD} = \frac{PF}{CF} = \frac{AP}{CD}, \therefore \frac{2-x}{x} = \frac{x}{2}, \therefore x^2 = 4 - 2x,$$

$$\text{解得 } x_1 = \sqrt{5} - 1, x_2 = -\sqrt{5} - 1,$$

$$\because x > 0, \therefore x = \sqrt{5} - 1, \therefore \frac{AF}{FD} = \frac{2 - (\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

(2)连接 DP, $\because PA=DF$, $\angle PAD = \angle ADC$, $AD=CD$,

$\therefore \triangle PAD \cong \triangle FDC$, $\therefore \angle 3 = \angle 2$, $PD=FC$.

又 $\because AB \parallel CD$, $\therefore \angle 1 = \angle 2$.

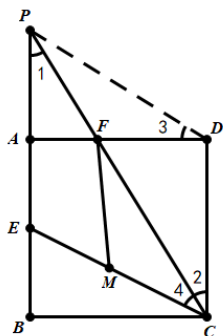
$$\text{又 } \because EC = \sqrt{5}, EB = EM = 1,$$

$$\therefore MC = \sqrt{5} - 1 = FD = AP.$$

$$\therefore PE = PA + AE = \sqrt{5} - 1 + 1 = \sqrt{5} = EC.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 4, \therefore \angle 4 = \angle 3.$$

又 $\because FD=MC$, $PD=FC$, $\therefore \triangle PFD \cong \triangle FMC$, $\therefore PF=FM$.



图(1)

(3)如图 2,在 AD 上取一点 Q',使 $AQ'=AQ$,在 BN 上取一点 B',使 $AB'=AB$,连接 B'Q',作 $B'G \perp AD$ 于点 G,交 EN 于点 K,

$\because \tan \angle NBE = 2, AB = AB' = 2,$

$$\therefore BB' = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 2 = \frac{4}{5}\sqrt{5}, B'N = BN = BB' = \frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

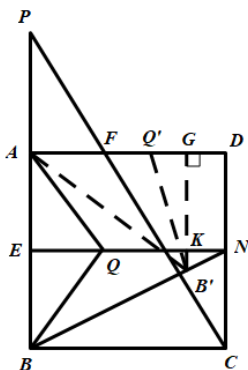
$$\because \triangle NB'K \sim \triangle NBE, \therefore B'K = \frac{1}{5}, KN = \frac{2}{5},$$

$$\therefore B'G = \frac{6}{5}, DG = \frac{2}{5},$$

$$\therefore Q'G = 3 - \sqrt{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5} - \sqrt{5}.$$

在 $Rt\triangle B'GQ'$ 中, $\angle B'GQ' = 90^\circ$, 利用勾股定理可得 $B'Q' = \frac{66 - 25\sqrt{5}}{5}$,

而 $(\sqrt{5} - 1)^2 \neq \frac{66 - 25\sqrt{5}}{5}$, $\therefore B'Q' \neq BQ$, $\therefore$ 点 B' 不在 BN 上.



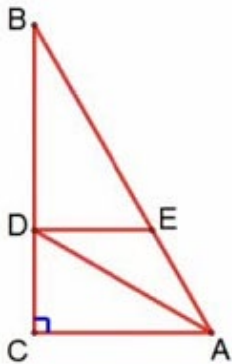
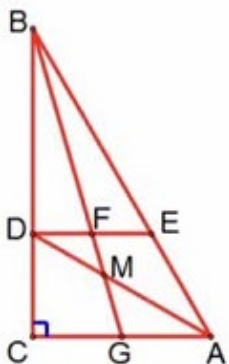
图(2)

6. (2019 • 衢州) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$. $\angle BAC = 60^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D, 过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 AB 于点 E, 点 M 是线段 AD 上的动点, 连结 BM 并延长分别交 DE, AC 于点 F, G.

(1) 求CD的长。

(2) 若点M是线段AD的中点，求 $\frac{EF}{DF}$ 的值。

(3) 请问当DM的长满足什么条件时，在线段DE上恰好只有一点P，使得 $\angle CPG=60^\circ$ ？



解：(1) $\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ， $\angle BAC=60^\circ$ ，

$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ$ 。…2分

在 $Rt\triangle ADC$ 中， $DC = AC \cdot \tan 30^\circ = 2\sqrt{3}$ ，……4分

(2) 易得， $BC=6\sqrt{3}$ ， $BD=4\sqrt{3}$ 。……5分

由 $DE \parallel AC$ ，得 $\angle EDA = \angle DAC$ ， $\angle DFM = \angle AGM$ 。

$\because AM=DM$ ，

$\therefore \triangle DFM \cong \triangle AGM$ ，

$\therefore DF=AG$ 。

由 $DE \parallel AC$ ，得 $\triangle BFE \sim \triangle BGA$ ，

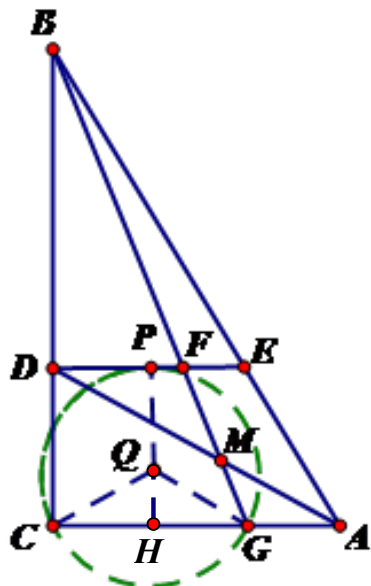
$\therefore \frac{EF}{AG} = \frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BC}$ ，…7分

$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{EF}{AG} = \frac{BD}{BC} = \frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$ ，…8分

(3) $\because \angle CPG=60^\circ$ ，过C,P,G作外接圆，圆心为Q

$\therefore \triangle CQG$ 是顶角为 120° 的等腰三角形。

①当 $\odot Q$ 与 DE 相切时，如图1，过Q点作 $QH \perp AC$ ，并延长HQ与DE交于点P，连接QC，QG。



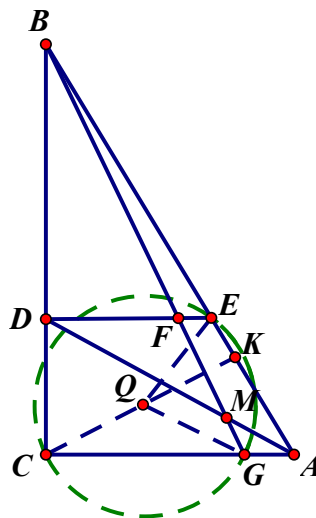
设 $\odot Q$ 的半径 $QP=r$ ，则 $QH=\frac{1}{2}r$ ， $r+\frac{1}{2}r=2\sqrt{3}$ ，解得 $r=\frac{4}{3}\sqrt{3}$ ，

$\therefore CG=\frac{4}{3}\sqrt{3} \times \sqrt{3}=4, AG=2$.

易知 $\triangle DFM \sim \triangle AGM$ ，可得 $\frac{DM}{AM} = \frac{DF}{AG} = \frac{4}{3}$ ，则 $\frac{DM}{AD} = \frac{4}{7}$ 。

$\therefore DM = \frac{16\sqrt{3}}{7}$ 9分

②当 $\odot Q$ 经过点E时，如图2，过C点作 $CK \perp AB$ ，垂足为K.



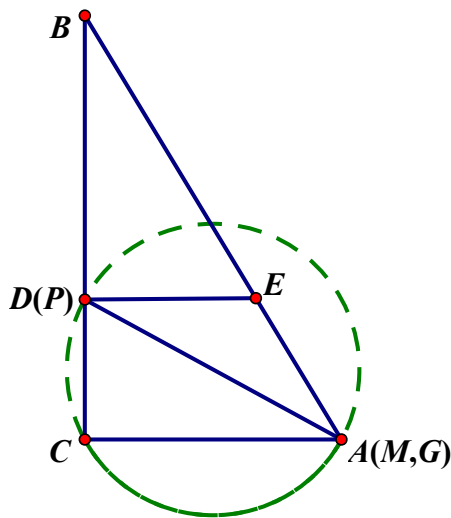
设 $\odot Q$ 的半径 $QC=QE=r$ ，则 $QK=3\sqrt{3}-r$.

在Rt△EQK中， $1^2 + (3\sqrt{3} - r)^2 = r^2$ ，解得 $r = \frac{14\sqrt{3}}{9}$ ，

$$\therefore CG = \frac{14\sqrt{3}}{9} \times \sqrt{3} = \frac{14}{3}$$

易知△DFM ∽ △AGM，可得 $DM = \frac{14\sqrt{3}}{5}$ 10分

③当⊙Q经过点D时，如图3，此时点M与点G重合，且给好在点A处，可得 $DM = 4\sqrt{3}$ 11分



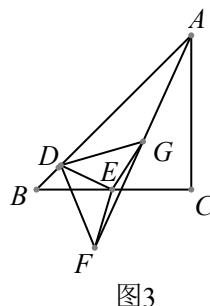
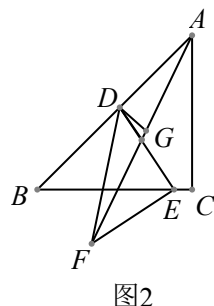
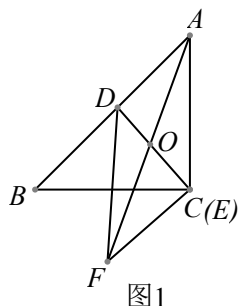
∴综上所述，当 $DM = \frac{16\sqrt{3}}{7}$ 或 $\frac{14\sqrt{3}}{5} < DM \leq 4\sqrt{3}$ 时，满足条件的点P只有一个.....12分

7. (2019 • 金华) 如图，在等腰 Rt△ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 14\sqrt{2}$ ，点 D, E 分别在边 AB, BC 上，将线段 ED 绕点 E 按逆时针方向旋转 90° 得到 EF.

(1) 如图 1，若 $AD = BD$ ，点 E 与点 C 重合，AF 与 DC 相交于点 O，求证： $BD = 2DO$.

(2) 已知点 G 为 AF 的中点.

①如图 2，若 $AD = BD$ ， $CE = 2$ ，求 DG 的长. ②若 $AD = 6BD$ ，是否存在点 E，使得△DEG 是直角三角形？若存在，求 CE 的长；若不存在，试说明理由.



(第 24 题图)

解：(1) 由旋转的性质得： $CD=CF$ ， $\angle DCF=90^\circ$ ，

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $AD=BD$ ，

$\therefore \angle ADO=90^\circ$ ， $CD=BD=AD$ ．

$\therefore \angle DCF=\angle ADC$ ．

在 $\triangle ADO$ 和 $\triangle FCO$ 中

$$\begin{cases} \angle AOD = \angle FOC, \\ \angle ADO = \angle FCO, \\ AD = FC, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADO \cong \triangle FCO$ ．

$\therefore DO=CO$ ．

$\therefore BD=CD=2DO$ ．

(2) ①如答图 1，连结 BF ，分别过点 D ， F 作 $DN \perp BC$ 于点 N ， $FM \perp BC$ 于点 M ．

$\therefore \angle DNE = \angle EMF = 90^\circ$ ．

又 $\because \angle NDE = \angle MEF$ ， $DE=EF$ ，

$\therefore \triangle DNE \cong \triangle EMF$ ． $\therefore DN=EM$ ．

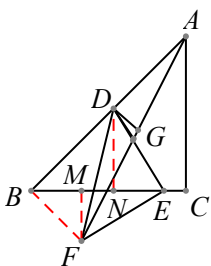
又 $\because BD=7\sqrt{2}$ ， $\angle ABC=45^\circ$ ， $\therefore DN=EM=7$ ，

$\therefore BM=BC-ME-EC=5$ ， $\therefore MF=NE=NC-EC=5$ ．

$\therefore BF=5\sqrt{2}$ ．

$\because$ 点 D ， G 分别为 AB ， AF 的中点．

$\therefore DG = \frac{1}{2}BF = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ ．



答图1

②过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H .

$$\because AD=6BD, AB=14\sqrt{2}, \therefore BD=2\sqrt{2}.$$

I) 当 $\angle DEG=90^\circ$ 时, 有如答图 2, 3 两种情况, 设 $CE=t$.

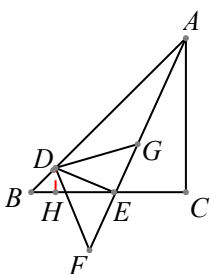
$$\because \angle DEF=90^\circ, \angle DEG=90^\circ,$$

$\therefore$ 点 E 在线段 AF 上.

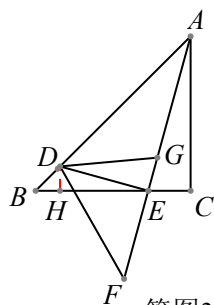
$$\therefore BH=DH=2, BE=14-t, HE=BE-BH=12-t.$$

$$\because \triangle DHE \sim \triangle ECA, \therefore \frac{DH}{EC} = \frac{HE}{CA}, \text{ 即 } \frac{2}{t} = \frac{12-t}{14}, \text{ 解得 } t=6 \pm 2\sqrt{2},$$

$$\therefore CE=6+2\sqrt{2} \text{ 或 } CE=6-2\sqrt{2}.$$



答图2



答图3

II) 当 $DG \parallel BC$ 时, 如答图 4.

过点 F 作 $FK \perp BC$ 于点 K , 延长 DG 交 AC 于点 N , 延长 AC 并截取 $MN=NA$, 连结 FM .
则 $NC=DH=2$, $MC=10$.

设 $GN=t$, 则 $FM=2t$, $BK=14-2t$.

$$\because \triangle DHE \cong \triangle EKF, \therefore KE=DH=2, \therefore KF=HE=14-2t.$$

$$\because MC=FK, \therefore 14-2t=10, t=2.$$

$$\because GN=EC=2, GN \parallel EC,$$

$\therefore$ 四边形 $GECN$ 是平行四边形.

而 $\angle ACB=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $GECN$ 是矩形.

$$\therefore \angle EGN=90^\circ.$$

$\therefore$ 当 $EC=2$ 时, 有 $\angle DGE=90^\circ$.

针旋转 90° ，旋转后角的两边分别与射线 BC 交于点 F 和点 G .

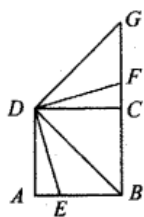
①线段 DB 和 DG 的数量关系是；

②写出线段 BE ， BF 和 DB 之间的数量关系.

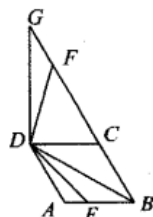
(2) 当四边形 $ABCD$ 是菱形， $\angle ADC=60^\circ$ ，点 E 是菱形 $ABCD$ 边 AB 所在直线上一点，连接 BD 、 DE ，将 $\angle BDE$ 绕点 D 逆时针旋转 120° ，旋转后角的两边分别与射线 BC 交于点 F 和点 G .

①如图 2，点 E 在线段 AB 上时，请探究线段 BE 、 BF 和 BD 之间的数量关系，写出结论并给出证明；

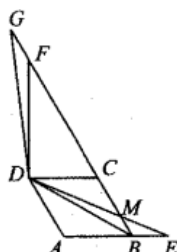
②如图 3，点 E 在线段 AB 的延长线上时， DE 交射线 BC 于点 M ，若 $BE=1$ ， $AB=2$ ，直接写出线段 GM 的长度.



(图1)



(图2)



(图3)

解：(1) ①答案： $DB=DG$.

$\because \angle BDE$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 $\angle GDF$,

$\therefore \angle EDF = \angle GDB = 90^\circ$ ， $\angle BDE = \angle GDF$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle DBC = \angle DBA = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ$.

$\because \angle BDG = 90^\circ$,

$\therefore \angle DBG = \angle G = 45^\circ$.

$\therefore DB=DG$.

②线段 BE ， BF 和 DB 关系为： $BF+BE=\sqrt{2}BD$ ，理由如下：

$\because \angle EDB = \angle FDG$ ， $DB=DG$ ， $\angle DBE = \angle G$ ，

$\therefore \triangle EDB \cong \triangle FDG$.

$\therefore BE=GF$.

故答案为 $DB=DG$.

在 $Rt\triangle BDG$ 中， $\because \angle DBG=45^\circ$ ，

$\therefore \cos \angle DBG = \frac{BD}{BG} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $BG=\sqrt{2}BD$,

又 $\because BG=BF+FG=BF+BE$,

$\therefore BF+BE=\sqrt{2}BD$.

(2) 线段 BE ， BF 和 DB 关系为： $BF+BE=\sqrt{3}BD$ ，理由如下：

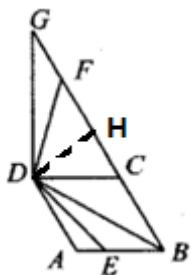
$\because \angle BDE$ 绕点 D 逆时针旋转 120° 得到 $\angle GDF$,

$\therefore \angle EDF = \angle GDB = 120^\circ$ ， $\angle BDE = \angle GDF$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore \angle ABC = \angle ADC = 60^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle EBD = \angle DBG = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$,
 $\therefore \angle G = 180^\circ - \angle DBG - \angle BDG = 30^\circ$,
 $\therefore \angle G = \angle DBG$,
 $\therefore BD = GD$,
 $\because \angle EDB = \angle FDG, DB = DG, \angle DBE = \angle G$,
 $\therefore \triangle DBE \cong \triangle DGF$,
 $\therefore BE = GF$,
 $\therefore BG = BF + GF = BF + BE$.
 过 D 作 $DH \perp BG$ 于 H ,



又 $\because DB = DG$,
 $\therefore BH = \frac{1}{2} BG$,
 在 $Rt\triangle BDH$ 中, $\angle DBG = 30^\circ$,
 $\therefore \cos \angle HBD = \frac{BH}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\therefore BH = \frac{\sqrt{3}}{2} BD$,
 又 $\because BH = \frac{1}{2} BG$,
 $\therefore BG = \sqrt{3} BD$.
 又 $\because BG = BF + BE$,
 $\therefore BF + BE = \sqrt{3} BD$.
 (2) $GM = \frac{19}{3}$, 理由如下:

由旋转可知, $\angle BDF = 120^\circ$,
 又 $\because \angle ABC = 60^\circ$, 四边形 $ABCD$ 为菱形,
 $\therefore \angle CDB = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$,
 $\therefore \angle FDC = \angle BDF - \angle BDC = 90^\circ$,
 在 $Rt\triangle CDF$ 中, $\angle DCF = 180^\circ - \angle BCD = 60^\circ$,
 $\therefore FC = \frac{CD}{\cos \angle DCF} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.
 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \triangle CDM \sim \triangle BEM,$$

$$\therefore \frac{CM}{BM} = \frac{CD}{BE} = \frac{2}{1},$$

$$\therefore CM = \frac{2}{3}BC = \frac{4}{3}.$$

由 (2) 可知, $\triangle BDE \cong \triangle FDG$,

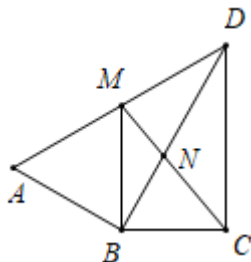
$$\therefore GF = BE = 1.$$

$$\therefore GM = FG + FC + CM = 1 + 4 + \frac{4}{3} = \frac{19}{3}.$$

9. (2019 • 凉山) 如图, $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$, DB 平分 $\angle ADC$, 过点 B 作 $BM \parallel CD$ 交 AD 于 M . 连接 CM 交 DB 于 N .

(1) 求证: $BD^2 = AD \cdot CD$;

(2) 若 $CD=6$, $AD=8$, 求 MN 的长.



解: (1) 证明: $\because DB$ 平分 $\angle ADC$, $\therefore \angle ADB = \angle BDC$, $\because \angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$, $\therefore \triangle DAB \sim \triangle DBC$,

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AD}{BD}, \therefore BD^2 = AD \cdot CD.$$

(2) 由 (1) 可知: $BD^2 = AD \cdot CD$. $\because CD=6, AD=8$, $\therefore BD=4\sqrt{3}$, 又 $AD=8$, $\therefore AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4$, $\therefore AB = \frac{1}{2}AD$, $\therefore \angle ADB = 30^\circ$, $\angle BDC = \angle ABD = 30^\circ$, 又 $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$, $\therefore \angle A = \angle DBC = 60^\circ$, $\because BM \parallel CD$, $\therefore \angle BDC = \angle MBD = 30^\circ$, $\angle ABM = \angle ABD - \angle MBD = 60^\circ$, $\therefore \triangle ABM$ 是等边三角形, 故 $BM = AB = 4$,

$$\because \triangle ABD \sim \triangle BCD, \therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DB}{CD}, \therefore BC = \frac{AB \times CD}{DB} = \frac{4 \times 6}{4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}, \because BM \parallel CD, \therefore \angle CBM = 180^\circ - \angle BCD$$

$$= 90^\circ, \therefore CM = \sqrt{BM^2 + CB^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}, \because BM \parallel CD, \therefore \triangle BMN \sim \triangle DCN, \therefore$$

$$\frac{MN}{CN} = \frac{MB}{CD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

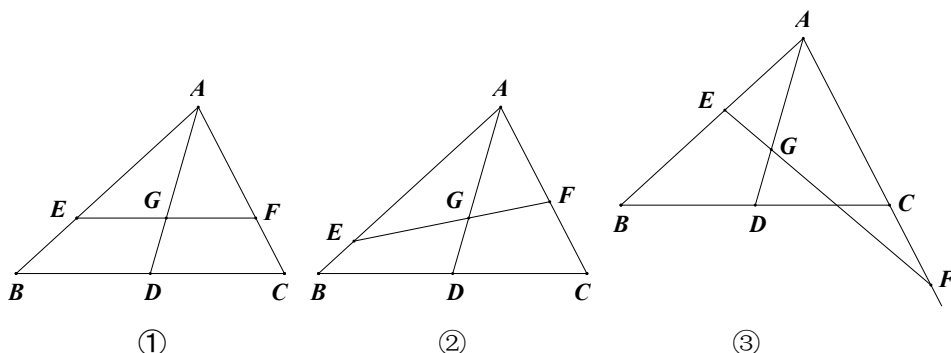
$$\therefore CN = 1.5MN, \text{ 又 } CN + MN = CM = 2\sqrt{7}, \therefore MN = \frac{4}{5}\sqrt{7}.$$

10. (2019 • 乐山) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 BC 边的中点, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过 G 点的直线分别交 AB 、 AC 于点 E 、 F .

(1) 如图①, 当 $EF \parallel BC$ 时, 求证: $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = 1$;

(2) 如图②, 当 EF 和 BC 不平行, 且点 E 、 F 分别在线段 AB 、 AC 上时, (1)中的结论是否成立? 如果成立, 请给出证明; 如果不成立, 请说明理由.

(3) 如图③, 当点 E 在 AB 的延长线上或点 F 在 AC 的延长线上时, (1)中的结论是否成立? 如果成立, 请给出证明; 如果不成立, 请说明理由.



解: (1) $\because G$ 是 $\triangle ABC$ 重心, $\therefore \frac{DG}{AG} = \frac{1}{2}$,

又 $\because EF \parallel BC$, $\therefore \frac{BE}{AE} = \frac{DG}{AG} = \frac{1}{2}$, $\frac{CF}{AF} = \frac{DG}{AG} = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

(2) (1)中结论成立, 理由如下: 如图, 过点 A 作 $AN \parallel BC$ 交 EF 的延长线于点 N ,

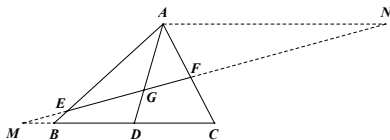
FE 、 CB 的延长线相交于点 M , 则 $\frac{BE}{AE} = \frac{BM}{AN}$, $\frac{CF}{AF} = \frac{CM}{AN}$,

$\therefore \frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = \frac{BM}{AN} + \frac{CM}{AN} = \frac{BM + CM}{AN}$,

又 $\because BM + CM = BM + CD + DM$, 而 D 是 BC 的中点, 即 $BD = CD$,

$\therefore BM + CM = BM + BD + DM = DM + DM = 2DM$,

$\therefore \frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = \frac{2DM}{AN}$, 又 $\because \frac{DM}{AN} = \frac{DG}{AG} = \frac{1}{2}$, $\therefore \frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, 故结论成立;



(3) (1)中结论不成立, 理由如下: 当 F 点与 C 点重合时, E 为 AB 中点, $BE = AE$,

点 F 在 AC 的延长线上时, $BE > AE$, $\therefore \frac{BE}{AE} > 1$, 则 $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} > 1$, 同理: 当点 E 在 AB 的延长线

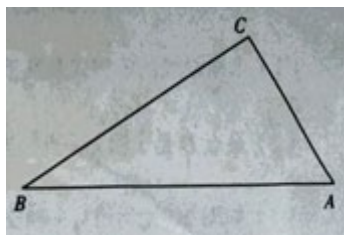
上时, $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} > 1$, $\therefore$ 结论不成立.

11. (2019 • 达州) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=2$, $BC=3$.

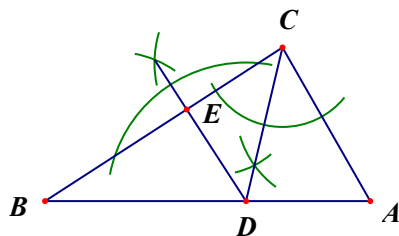
(1) 尺规作图: 不写作法, 保留作图痕迹. ①作 $\angle ACB$ 的平分线, 交斜边 AB 于点 D ;

②过点 D 作 BC 的垂线, 垂足为 E .

(2) 在 (1) 作出的图形中, 求 DE 的长.



解:



(1)

(2) 解: $\because DE \perp AC$, $\angle ACB=90^\circ$

$\therefore DE \parallel AC$

$\therefore \angle ACD = \angle CDE$

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$

$\therefore \angle ACD = \angle DCE$

$\therefore \angle DCE = \angle CDE$

$\therefore ED = EC$

$\because DE \parallel AC$

$\therefore \triangle BED \sim \triangle BCA$

$$\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC}$$

设 $ED=EC=x$, 则 $BE=3-x$

$$\frac{x}{2} = \frac{3-x}{3}$$

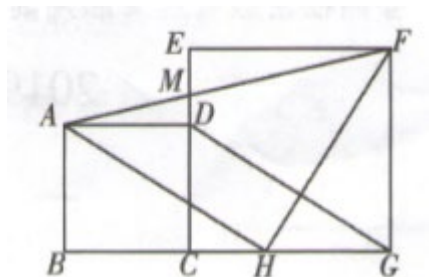
$$\text{解得: } x = \frac{6}{5}$$

$\therefore DE$ 的长为 $\frac{6}{5}$.

12. (2019 • 潍坊) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边 CD 在正方形 $ECGF$ 的边 CE 上, 连接 DG , 过点 A 作 $AH \parallel DG$, 交 BG 于点 H , 连接 HF , AF , 其中 AF 交 EC 于点 M .

(1) 求证: $\triangle AHF$ 为等腰直角三角形.

(2) 若 $AB=3$, $EC=5$, 求 EM 的长.



解: (1) 证明: $\because AD \parallel CG$, $AH \parallel DG$

$\therefore$ 四边形 $ADGH$ 为平行四边形.

$\therefore AD=HG$.

$\because AD=BC$,

$\therefore BC=HG$

$\therefore BC+CH=GH+HC$

即 $BH=CG$

$\therefore GF=BH$

在 $\triangle ABH$ 和 $\triangle HGF$ 中

$AB=HG$ $\angle B = \angle HGF$ $BH=GF$

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle HGF$

$\therefore \angle BAH = \angle GHF$ $AF=HF$

$\because \angle BAH + \angle BHA = 90^\circ$

$\therefore \angle AHF = 90^\circ$

$\therefore \triangle AHF$ 为等腰直角三角形.

(2) $\because AB=3$, $EC=5$

$\therefore AD=CD=3$, $CE=EF=5$

$\therefore DE=2$

$\because AD \parallel EF$

$\therefore \frac{DM}{EM} = \frac{AD}{EF} = \frac{3}{5}$

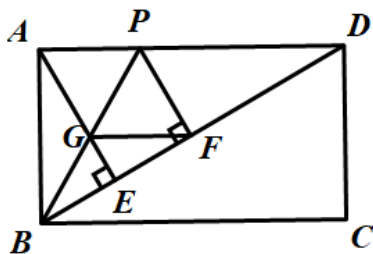
$\therefore EM = \frac{5}{8} DE = \frac{5}{4}$.

13. (2019 • 泰安) 在矩形 $ABCD$ 中, $AE \perp BD$ 于点 E , 点 P 是边 AD 上一点.

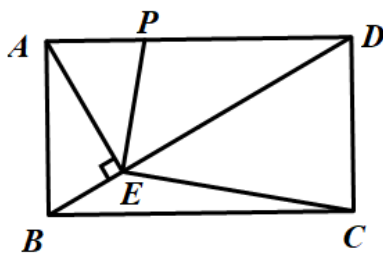
(1) 若 BP 平分 $\angle ABD$, 交 AE 于点 F , 如图①, 证明四边形 $AGFP$ 是菱形

(2) 若 $PE \perp EC$, 如图②, 求证: $AE \cdot AB = DE \cdot AP$;

(3) 在(2)的条件下, 若 $AB=1$, $BC=2$, 求 AP 的长.



图①



图②

解: (1) $\because BP$ 平分 $\angle ABD$, $PF \perp BD$, $PA \perp AB$, $\therefore AP = PF$, $\angle ABP = \angle GBE$, 又 $\because$ 在 $Rt\triangle ABP$ 中, $\angle APB + \angle ABP = 90^\circ$, 在 $Rt\triangle BGE$ 中 $\angle GBE + \angle BGE = 90^\circ$, $\therefore \angle APB = \angle BGE$, 又 $\because \angle BGE = \angle AGP$, $\therefore \angle APB = \angle AGP$, $\therefore AP = AG$, $\therefore AG = PF$, $\because PF \perp BD$, $AE \perp BD$, $\therefore PF \parallel AG$, $\therefore$ 四边形 $AGFP$ 是平行四边形, $\therefore \square AGFP$ 是菱形;
(2) $\because AE \perp BD$, $PE \perp EC$, $\therefore \angle AEP + \angle PED = 90^\circ$, $\angle CED + \angle PED = 90^\circ$, $\therefore \angle AEP = \angle CED$, 又 $\because \angle PAE + \angle ADE = 90^\circ$, $\angle CDE + \angle ADE = 90^\circ$, $\therefore \angle PAE = \angle CDE$, $\therefore \triangle AEP \sim \triangle DEC$, $\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{AP}{CD}$, $\therefore$

$AE \cdot CD = DE \cdot AP$, 又 $\because CD = AB$, $\therefore AE \cdot AB = DE \cdot AP$;

(3) $\because AB = 1, BC = 2$, $\therefore$ 在 $Rt\triangle ADE$ 中, $\tan \angle ADB = \frac{AE}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{2}$, 由(2)知 $\frac{AP}{CD} = \frac{AE}{DE} = \frac{1}{2}$, $\therefore AP = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}$.

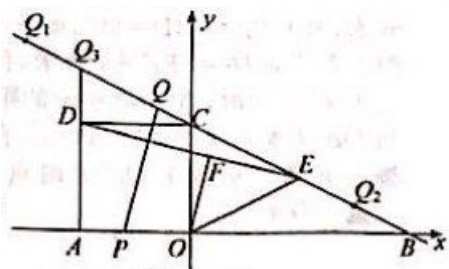
14. (2019 浙江省温州市, 24, 14 分) (本题满分 14 分)

如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 分别交 x 轴、 y 轴于点 B , C , 正方形 $A OCD$ 的顶点 D 在第二象限内, E 是 BC 中点, $OF \perp DE$ 于点 F , 连结 OE . 动点 P 在 AO 上从点 A 向终点 O 匀速运动, 同时, 动点 Q 在直线 BC 上从某点 Q_1 向终点 Q_2 匀速运动, 它们同时到达终点.

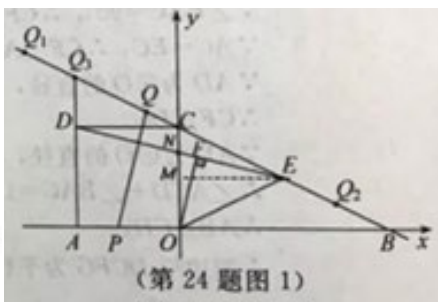
(1) 求点 B 的坐标和 OE 的长;

(2) 设点 Q_2 为 (m, n) , 当 $\frac{n}{m} = \frac{1}{7} \tan \angle EOF$ 时, 求点 Q_2 的坐标;

(3) 根据(2)的条件, 当点 P 运动到 AO 中点时, 点 Q 恰好与点 C 重合. ①延长 AD 交直线 BC 于点 Q_3 , 当点 Q 在线段 $Q_2 Q_3$ 上时, 设 $Q_3 Q = s$, $AP = t$, 求 s 关于 t 的函数表达式; ②当 PQ 与 $\triangle OEF$ 的一边平行时, 求所有满足条件的 AP 的长.



(第 24 题)



(第 24 题图 1)

【解题过程】(1) 令 $y = 0$, 则 $-\frac{1}{2}x + 4 = 0$, $\therefore x = 8$, $\therefore B(8, 0)$.

$\because C(0, 4)$, 在 $Rt\triangle BOC$ 中, $BC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$.

又 $\because E$ 为 BC 的中点, $\therefore OE=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{5}$.

如图1,作 $EM\perp OC$ 于点 M ,则 $EM\parallel CD$,

$\therefore \triangle CDN\sim\triangle MEN$, $\therefore \frac{CN}{MN}=\frac{CD}{EM}=\frac{4}{4}=1$, $\therefore CN=MN=1$, $\therefore EN=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.

$\therefore EN\cdot OF=ON\cdot EM$, $\therefore OF=\frac{3\times 4}{\sqrt{17}}=\frac{12}{\sqrt{17}}$.

由勾股定理得 $EF=\frac{14}{\sqrt{17}}$, $\therefore \tan\angle EOF=\frac{7}{6}$, $\therefore \frac{n}{m}=\frac{1}{7}\times\frac{7}{6}=\frac{1}{6}$.

$\therefore n=-\frac{1}{2}m+4$, $\therefore m=6$, $n=1$, $\therefore Q_2(6, 1)$.

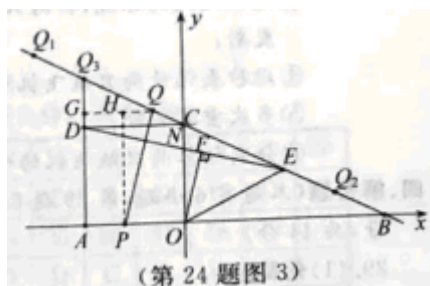
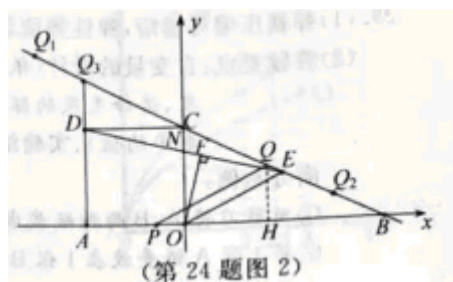
① $\because$ 动点 P 、 Q 同时作匀速直线运动, $\therefore s$ 关于 t 成一次函数关系,设 $s=kt+b$,

将 $\begin{cases} t=2 \\ s=2\sqrt{5} \end{cases}$ 和 $\begin{cases} t=4 \\ s=5\sqrt{5} \end{cases}$ 代入得 $\begin{cases} 2k+b=2\sqrt{5} \\ 4k+b=5\sqrt{5} \end{cases}$,解得 $\begin{cases} k=\frac{3}{2}\sqrt{5} \\ b=-\sqrt{5} \end{cases}$, $\therefore s=\frac{3}{2}\sqrt{5}t-\sqrt{5}$;

②(i)当 $PQ\parallel OE$ 时(如图2), $\angle QPB=\angle EOB=\angle OBE$,作 $QH\perp x$ 轴于点 H ,则 $PH=BH=\frac{1}{2}PB$.

$\therefore BQ=6\sqrt{5}-S=6\sqrt{5}-\frac{3}{2}\sqrt{5}t+\sqrt{5}=7\sqrt{5}-\frac{3}{2}\sqrt{5}t$,

又 $\because \cos\angle QBH=\frac{2}{5}\sqrt{5}$, $\therefore BH=14-3t$, $\therefore PB=28-6t$, $\therefore t+28-6t=12$, $\therefore t=\frac{16}{5}$;



(ii)当 $PQ\parallel OF$ 时(如图3),过点 Q 作 $QG\perp AQ_3$ 于点 G ,过点 P 作 $PH\perp GQ$ 于点 H ,

由 $\triangle Q_3QG\sim\triangle CBO$ 得 $Q_3G:QG:Q_3Q=1:2:\sqrt{5}$. $\therefore Q_3Q=S=\frac{3}{2}\sqrt{5}t-\sqrt{5}$, $\therefore Q_3G=\frac{3}{2}t-1$, $QG=3t-2$,

$\therefore PH=AG=AQ_3-Q_3G=6-(\frac{3}{2}t-1)=7-\frac{3}{2}t$, $QH=QG-AP=3t-2-t=2t-2$.

$$\because \angle HPQ = \angle CDN, \therefore \tan \angle HPQ = \tan \angle CDN = \frac{1}{4}, \therefore 2t - 2 = \frac{1}{4} (7 - \frac{3}{2}t), \therefore t = \frac{30}{19}.$$

(iii) 由图形可知 PQ 不可能与 EF 平行.

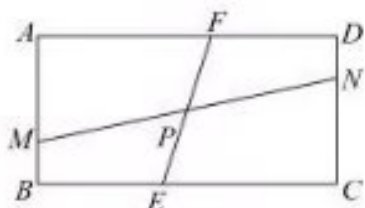
综上所述, 当 PQ 与 $\triangle OEF$ 的一边平行时, AP 的长为 $\frac{16}{5}$ 或 $\frac{30}{19}$.

15. (2019 年浙江省绍兴市, 第 24 题, 14 分) 如图, 矩形 ABCD 中, $AB=a$, $BC=b$, 点 M, N 分别在边 AB, CD 上, 点 E, F 分别在 BC, AD 上, MN, EF 交于点 P, 记 $k = MN : EF$.

(1) 若 $a : b$ 的值是 1, 当 $MN \perp EF$ 时, 求 k 的值.

(2) 若 $a : b$ 的值是 $\frac{1}{2}$, 求 k 的最大值和最小值.

(3) 若 k 的值是 3, 当点 N 是矩形的顶点, $\angle MPE = 60^\circ$, $MP = EF = 3PE$ 时, 求 $a : b$ 的值.



第 24 题图

【思路分析】(1) 因为 $a : b$ 的值是 1, 从而可得四边形 ABCD 是正方形; 可过 M 作 $MQ \perp CD$, $FH \perp BC$, 由题意可证明 $\triangle FHE \cong \triangle MQN$, 从而可得 $MN = EF$, 从而可求出 k 的值.

(2) 由 $a : b$ 的值是 $\frac{1}{2}$, 可得 $b = 2a$, 要求 k 的最大值和最小值, 只要求出 MN 和 EF 的取值范围, 由题意可知 MN 的取值范围是 $2a \leq MN \leq \sqrt{5}a$, EF 的取值范围是 $a \leq EF \leq \sqrt{5}a$. 所以要求 k 的最大值, 则 MN 取最长, EF 最短; 要求 k 的最小值, 则 MN 取最短, EF 最长从而可求出 k 的最大值和最小值.

(3) 连接 FN, ME. 由 $k = 3$, $MP = EF = 3PE$, 得 $\frac{MN}{PM} = \frac{EF}{PE} = 3$, 得 $\frac{PN}{PM} = \frac{PF}{PE} = 2$, 由 $\triangle PNF \sim \triangle$

PME , 得 $\frac{PN}{PM} = \frac{PF}{PE} = 2$, $ME \parallel NF$, 设 $PE = 2m$, 则 $PF = 4m$, $MP = 6m$, $NP = 12m$, 再分两种情形:

①如图 2 中, 当点 N 与点 D 重合时, 点 M 恰好与 B 重合. ②如图 3 中, 当点 N 与 C 重合, 分别求解即可.

【解题过程】

24. (本题满分 14 分)

解: (1) 作 $FH \perp BC$, $MQ \perp CD$, 如图 1,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore FH = AB$, $MQ = BC$, $\therefore FH = MQ$.

$\because MN \perp EF$,

$\therefore \angle HFE = \angle NMQ$, $\angle FHE = \angle MQN = 90^\circ$,

$\therefore \triangle FHE \cong \triangle MQN$, $\therefore MN = EF$,

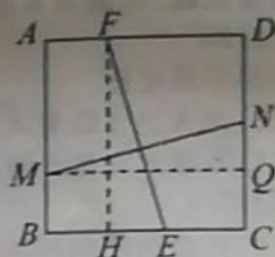
$\therefore k = 1$.

(2) $\because a : b = 1 : 2$, $\therefore b = 2a$.

由题意得, $2a \leq MN \leq \sqrt{5}a$, $a \leq EF \leq \sqrt{5}a$,

当 MN 取最长时, EF 可取到最短, 此时 k 的值最大, 最大值为 $\sqrt{5}$,

当 MN 取最短时, EF 可取到最长, 此时 k 的值最小, 最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



第 24 题图 1

(3) 连结 FN , ME ,

$\because k = 3$, $MP = EF = 3PE$,

$\therefore \frac{MN}{PM} = \frac{EF}{PE} = 3$, $\therefore \frac{PN}{PM} = \frac{PF}{PE} = 2$,

$\therefore \triangle PNF \sim \triangle PME$,

$\therefore \frac{NF}{ME} = \frac{PN}{PM} = 2$, $ME \parallel NF$.

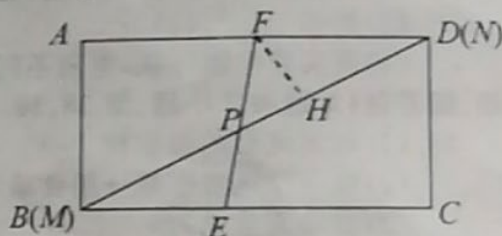
设 $PE = 2m$, 则 $PF = 4m$, $MP = 6m$, $NP = 12m$.

① 当点 N 与点 D 重合时, 如图 2, 点 M 恰好与点 B 重合, 过点 F 作 $FH \perp BD$ 于点 H ,

$\because \angle MPE = \angle FPH = 60^\circ$,

$\therefore PH = 2m$, $FH = 2\sqrt{3}m$, $HD = 10m$,

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{AB}{AD} = \frac{FH}{HD} = \frac{\sqrt{3}}{5}$.



第 24 题图 2

② 当点 N 与点 C 重合时, 如图 3, 过点 E 作 $EH \perp MN$ 于点 H ,

则 $PH = m$, $HE = \sqrt{3}m$,

$\therefore HC = PH + PC = 13m$,

$\therefore \tan \angle HCE = \frac{MB}{BC} = \frac{HE}{HC} = \frac{\sqrt{3}}{13}$.

$\because ME \parallel FC$,

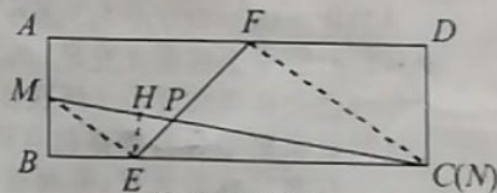
$\therefore \angle MEB = \angle FCB = \angle CFD$.

又 $\because \angle B = \angle D$,

$\therefore \triangle MEB \sim \triangle CFD$, $\therefore \frac{CD}{MB} = \frac{FC}{ME} = 2$,

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{CD}{BC} = \frac{2MB}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{13}$.

综上所述, $a : b$ 的值为 $\frac{\sqrt{3}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{3}}{13}$.



第 24 题图 3

16. (2019 山东烟台, 24, 11 分)

【问题探究】

(1)如图 1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 均为等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, 点 B, D 在同一直线上, 连接 AD, BD .

①请探究 AD 与 BD 之间的位置关系: _____;

②若 $AC = BC = \sqrt{10}$, $DC = CE = \sqrt{2}$, 则线段 AD 的长为_____.

【拓展延伸】

(2)如图 2, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 均为直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, $AC = \sqrt{21}$, $BC = \sqrt{7}$, $CD = \sqrt{3}$, $CE = 1$, 将 $\triangle DEC$ 绕点 C 在平面内顺时针旋转, 设旋转角 $\angle BCD$ 为 α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$), 作直线 BD , 连接 AD , 当点 B, D, E 在同一直线上时, 画出图形, 并求线段 AD 的长.

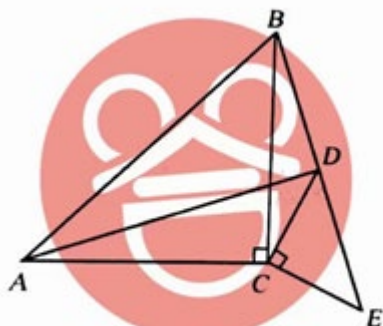


图 1

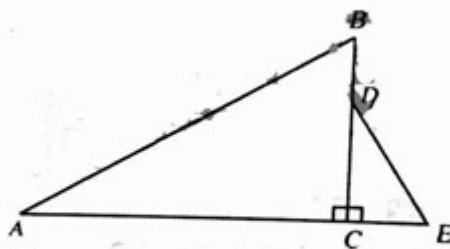


图 2

【解题过程】

(1) 本题的答案是

① $AD \perp BD$ ② 4

探究过程如下:

①因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 均为等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$

所以 $CA = CB$, $CD = CE$, $\angle ACB + \angle BCD = \angle DCE + \angle BCD$

所以 $\angle ACD = \angle BCE$,

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCE$ 中,

因为 $CA = CB$, $\angle ACD = \angle BCE$, $CD = CE$,

所以 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$,

所以 $\angle CAD = \angle CBE$,

因为 $\angle ACB = 90^\circ$

所以 $\angle CAD + \angle DAB + \angle ABC = 90^\circ$,

所以 $\angle CBE + \angle DAB + \angle ABC = 90^\circ$

即 $\angle DAB + \angle DBA = 90^\circ$

所以 $\angle ADB = 90^\circ$,

所以 $AD \perp BD$.

②由①可得 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$,

所以 $AD = BE$,

在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中, 由勾股定理得,

$$DE = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 由勾股定理得,

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{5},$$

设 $AD = x$, 则 $BE = x$,

所以 $BD = BC - DE = x - 2$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由勾股定理得,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2,$$

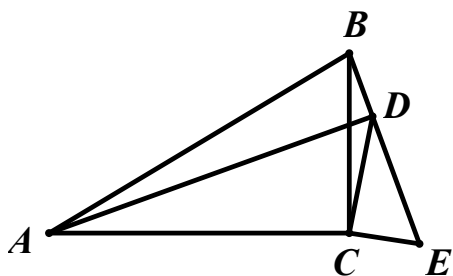
$$\text{即 } (2\sqrt{5})^2 = x^2 + (x - 2)^2$$

解得 $x = 4$ 或 $x = -2$ (舍去),

所以 $AD = 4$,

即线段 AD 的长为 4.

(2) 解: 情况 1: 当 $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ 时, 点 B, D, E 在同一直线上时的图形如图 (1) 所示,



第 16 题答图 (1)

因为 $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$

所以 $\angle ACB + \angle BCD = \angle DCE + \angle BCD$

所以 $\angle ACD = \angle BCE$,

因为 $\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \sqrt{3}$, $\frac{DC}{CE} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$,

所以 $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{CE}$

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCE$ 中,

因为 $\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{CE}$, $\angle ACD = \angle BCE$,

所以 $\triangle ACD \sim \triangle BCE$,

所以 $\angle CAD = \angle CBE$, $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$,

所以 $AD = \sqrt{3}BE$

因为 $\angle ACB = 90^\circ$

所以 $\angle CAD + \angle DAB + \angle ABC = 90^\circ$,

所以 $\angle CBE + \angle DAB + \angle ABC = 90^\circ$

即 $\angle DAB + \angle DBA = 90^\circ$

所以 $\angle ADB = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中, 由勾股定理得,

$$DE = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，由勾股定理得，

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{21})^2 + (\sqrt{7})^2} = 2\sqrt{7},$$

设 $BE = x$ ，则 $AD = \sqrt{3}BE = \sqrt{3}x$ ，

所以 $BD = BC - DE = x - 2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，由勾股定理得，

$$AB^2 = AD^2 + BD^2,$$

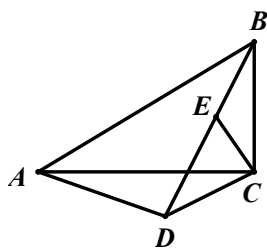
$$\text{即 } (2\sqrt{7})^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (x-2)^2$$

解得 $x = 3$ 或 $x = -2$ (舍去)，

所以 $AD = \sqrt{3}BE = 3\sqrt{3}$ ，

即当 $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ 时，点 B, D, E 在同一直线上时，线段 AD 的长为 $3\sqrt{3}$ 。

情况 2：当 $180^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ 时，点 B, D, E 在同一直线上时的图形如图 (2) 所示，



第 16 题答图 (2)

因为 $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$

所以 $\angle ACB - \angle ACE = \angle DCE - \angle ACE$

所以 $\angle ACD = \angle BCE$ ，

$$\text{因为 } \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \sqrt{3}, \quad \frac{DC}{CE} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{CE}$$

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCE$ 中,

$$\text{因为 } \frac{AC}{BC} = \frac{DC}{CE}, \angle ACD = \angle BCE,$$

所以 $\triangle ACD \sim \triangle BCE$,

$$\text{所以 } \angle CAD = \angle CBE, \frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } AD = \sqrt{3}BE$$

$$\text{因为 } \angle ACB = 90^\circ$$

$$\text{所以 } \angle CAD + \angle DAB + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle CBE + \angle DAB + \angle ABC = 90^\circ$$

$$\text{即 } \angle DAB + \angle DBA = 90^\circ$$

$$\text{所以 } \angle ADB = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中, 由勾股定理得,

$$DE = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 由勾股定理得,

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{21})^2 + (\sqrt{7})^2} = 2\sqrt{7},$$

$$\text{设 } BE = x, \text{ 则 } AD = \sqrt{3}BE = \sqrt{3}x,$$

$$\text{所以 } BD = BC + DE = x + 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由勾股定理得,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2,$$

$$\text{即 } (2\sqrt{7})^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (x+2)^2$$

$$\text{解得 } x = 2 \text{ 或 } x = -3 \text{ (舍去),}$$

$$\text{所以 } AD = \sqrt{3}BE = 2\sqrt{3},$$

即当 $180^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ 时, 点 B, D, E 在同一直线上时, 线段 AD 的长为 $2\sqrt{3}$.

综上所述, 线段 AD 的长为 $3\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$.

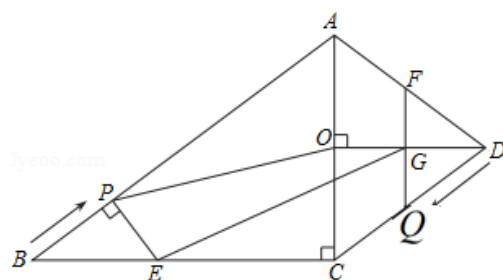
17. (2019山东省青岛市, 24, 12分) 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$. OD 垂直平分 AC , 点 P 从点 B 出发, 沿 BA 方向匀速运动, 速度为 1cm/s ; 同时, 点 Q 从点 D 出发, 沿 DC 方向匀速运动, 速度为 1cm/s ; 当一个点停止运动, 另一个点也停止运动. 过点 P 作 $PE \perp AB$, 交 BC 于点 E , 过点 Q 作 $QF \parallel AC$, 分别交 AD , OD 于点 F , G . 连接 OP , EG , 设运动时间为 t (s) ($0 < t < 5$), 解答下列问题:

(1) 当为何值时, 点 E 在 $\angle BAC$ 的平分线上?

(2) 设四边形 $PECO$ 的面积为 S (cm^2), 求 S 与 t 的函数关系式;

(3) 在运动过程中, 是否存在某一时刻 t , 使四边形 $PEGO$ 的面积最大? 若存在, 求出的 t 值; 若不存在, 请说明理由;

(4) 连接 OE , OQ , 在运动过程中, 是否存在某一时刻 t , 使 $OE \perp OQ$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在,



请说明理由.

【解题过程】解: (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$,

$$\therefore AC = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6(\text{cm}),$$

$\because OD$ 垂直平分线段 AC ,

$$\therefore OC = OA = 3(\text{cm}), \quad \angle DOC = 90^\circ,$$

$\because CD \parallel AB$,

$$\therefore \angle BAC = \angle DCO,$$

$$\because \angle DOC = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle DOC \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{AC}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{BC}{OD},$$

$$\therefore \frac{6}{3} = \frac{10}{CD} = \frac{8}{OD},$$

$$\therefore CD = 5(\text{cm}), \quad OD = 4(\text{cm}),$$

$$\because PB = t, \quad PE \perp AB,$$

$$\text{易知: } PE = \frac{3}{4}t, \quad BE = \frac{5}{4}t,$$

当点 E 在 $\angle BAC$ 的平分线上时,

$$\because EP \perp AB, \quad EC \perp AC,$$

$$\therefore PE = EC,$$

$$\therefore \frac{3}{4}t = 8 - \frac{5}{4}t,$$

$$\therefore t = 4.$$

$\therefore$ 当 t 为 4 秒时, 点 E 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

(2) 如图, 连接 OE , PC .

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}OPEG} &= S_{\triangle OEG} + S_{\triangle OPE} = S_{\triangle OEG} + (S_{\triangle OPC} + S_{\triangle PCE} - S_{\triangle OEC}) \\ &= \frac{1}{2} \times (4 - \frac{4}{5}t) \times 3 + [\frac{1}{2} \times 3 \times (8 - \frac{4}{5}t) + \frac{1}{2} \times (8 - \frac{5}{4}t) \times \frac{3}{5}t - \frac{1}{2} \times 3 \times (8 - \frac{5}{4}t)] \\ &= -\frac{3}{8}t^2 + \frac{15}{8}t + 6 (0 < t < 5). \end{aligned}$$

(3) 存在.

$$\because S = -\frac{3}{8}(t - \frac{5}{2})^2 + \frac{267}{32} (0 < t < 5),$$

$$\therefore t = \frac{5}{2} \text{ 时, 四边形 } OPEG \text{ 的面积最大, 最大值为 } \frac{267}{32}.$$

(4) 存在. 如图, 连接 OQ .

$$\because OE \perp OQ,$$

$$\therefore \angle EOC + \angle QOC = 90^\circ,$$

$$\because \angle QOC + \angle QOG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOC = \angle QOG,$$

$$\therefore \tan \angle EOC = \tan \angle QOG,$$

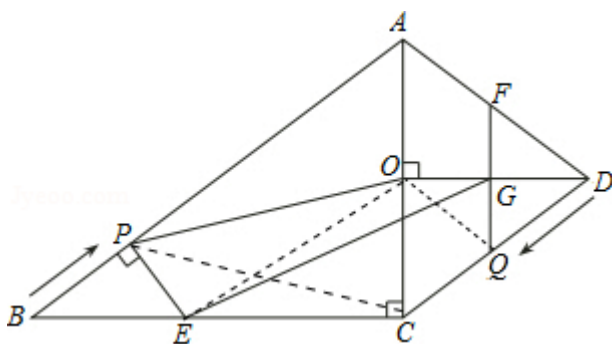
$$\therefore \frac{EC}{OC} = \frac{GQ}{OG},$$

$$\therefore \frac{8 - \frac{5}{4}t}{3} = \frac{\frac{3}{5}t}{4 - \frac{4}{5}t},$$

$$\text{整理得: } 5t^2 - 61t + 160 = 0,$$

$$\text{解得 } t = \frac{61 - \sqrt{521}}{10} \text{ 或 } t = \frac{61 + \sqrt{521}}{10} > 5 \text{ (舍弃)}$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{61 - \sqrt{521}}{10} \text{ 秒时, } OE \perp OQ.$$



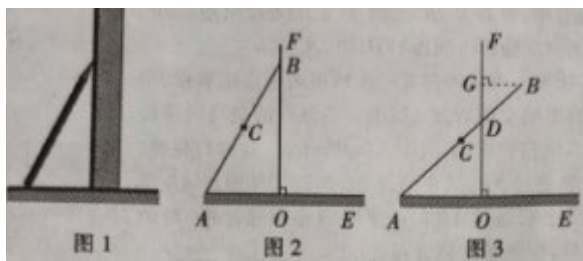
18. (2019 江西省, 21, 9 分) 数学活动课上, 张老师引导同学进行如下探究:

如图 1, 将长为 12cm 的铅笔 AB 斜靠在垂直于水平桌面 AE 的直尺 FO 的边沿上, 一端 A 固定在桌面上,

图 2 是示意图.

活动一

如图 3, 将铅笔 AB 绕端点 A 顺时针旋转, AB 与 OF 交于点 D, 当旋转至水平位置时, 铅笔 AB 的中点 C 与点 O 重合.



数学思考

(1) 设 $CD = x \text{ cm}$, 点 B 到 OF 的距离 $GB = y \text{ cm}$.

① 用含 x 的代数式表示: AD 的长是 _____ cm, BD 的长是 _____ cm;

② y 与 x 的函数关系式是 _____, 自变量 x 的取值范围是 _____.

活动二

(2) ① 列表: 根据(1)中所求函数关系式计算并补全表格.

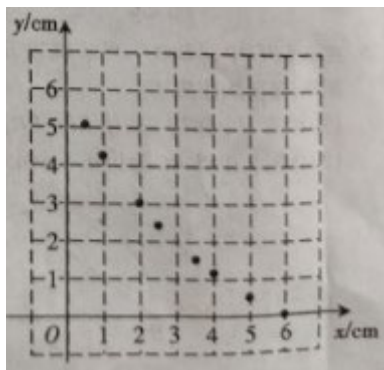
$x(\text{cm})$	6	5	4	3.5	3	2.5	2	1	0.5	0
$y(\text{cm})$	0	0.55	1.2	1.58		2.47	3	4.29	5.08	

② 描点: 根据表中的数值, 继续描出①中剩余的两个点 (x, y) .

③ 连线: 在平面直角坐标系中, 请用平滑的曲线画出该函数的图象.

数学思考

(3) 请你结合函数的图象, 写出该函数的两条性质或结论.



【解题过程】(1) ① 由题意得 $OA = AC = BC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 12 = 6 \text{ (cm)}$, $AD = 6 + x$, $BD = 6 - x$,

答案: $6 + x$; $6 - x$

② 由题意得 $AO \perp CF$, $BG \perp AF$,

$\therefore AO \parallel BG$,

$\therefore \triangle BGD \sim \triangle AOD$,

$$\therefore \frac{BG}{AO} = \frac{BD}{AD}.$$

∵ BG=y, AO=6, BD=6-x, AD=6+x,

$$\therefore \frac{y}{6} = \frac{6-x}{6+x}$$

∴ y 与 x 的函数关系式为 $y = \frac{36-6x}{6+x}$,

由题意得自变量 x 的取值范围 $0 \leq x \leq 6$.

答案: $y = \frac{36-6x}{6+x}$; $0 \leq x \leq 6$.

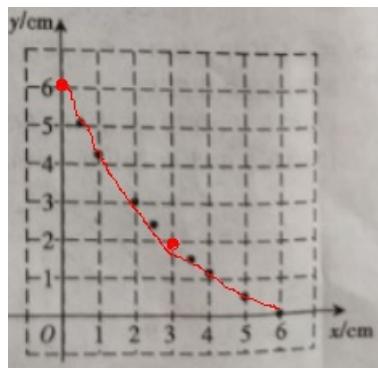
(2) 当 x=3 时, $y = \frac{36-6x}{6+x} = \frac{36-6 \times 3}{6+3} = \frac{18}{9} = 2$,

当 x=0 时, $y = \frac{36-6x}{6+x} = \frac{36-6 \times 0}{6+0} = 6$,

∴ 并补全表格如下:

x(cm)	6	5	4	3.5	3	2.5	2	1	0.5	0
y(cm)	0	0.55	1.2	1.58	2	2.47	3	4.29	5.08	6

描点, 画函数图象如下:



(3) 答案不唯一. 结合函数图象可知: 函数图象与 x 轴交于点 (6, 0); 函数图象与 y 轴交于点 (0, 6); y 随 x 的增大而减小; 等等.